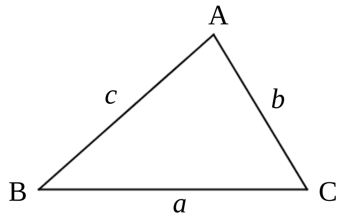
余弦定理

△ABC において，頂点 A，B，C における角の大きさを A，B，C，その対辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とすると，次の等式が成り立つ。

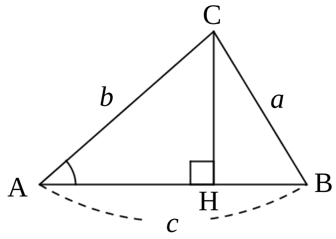
$$\boldsymbol{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A}$$
$$\boldsymbol{b^2=c^2+a^2-2ca\cos B}$$
$$\boldsymbol{c^2=a^2+b^2-2ab\cos C}$$



証明

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ を証明する。頂点 C から辺 AB またはその延長に垂線を引き，その交点を H とする。

(ⅰ)　点 H が辺 AB 上にあるとき



△BCH において三平方の定理により

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{BH}^2 \quad \cdots\cdots①$$

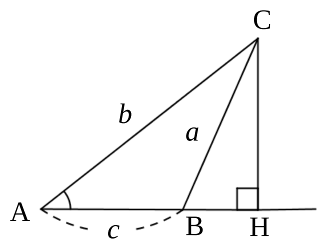
ここで　$\mathrm{BC}^2=a^2$，$\mathrm{CH}^2=(b\sin A)^2$，$\mathrm{BH}^2=(c-b\cos A)^2$

これらを①に代入すると　$a^2=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2$

$$a^2=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A$$

$b^2\sin^2 A+b^2\cos^2 A=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)=b^2$ より　　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

(ⅱ)　点 H が辺 AB を B の方に延長した上にあるとき



△BCH において三平方の定理により

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{BH}^2 \quad \cdots\cdots①'$$

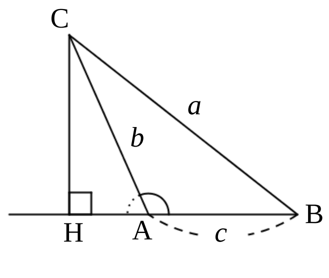
ここで　$\mathrm{BC}^2=a^2$，$\mathrm{CH}^2=(b\sin A)^2$，$\mathrm{BH}^2=(b\cos A-c)^2$

これらを①′ に代入すると　$a^2=(b\sin A)^2+(b\cos A-c)^2$

$$a^2=b^2\sin^2 A+b^2\cos^2 A-2bc\cos A+c^2$$

$b^2\sin^2 A+b^2\cos^2 A=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)=b^2$ より　　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

(ⅲ)　点 H が辺 AB を A の方に延長した上にあるとき



△BCH において三平方の定理により

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{BH}^2 \quad \cdots\cdots①''$$

ここで　$\mathrm{BC}^2=a^2$，$\mathrm{CH}^2=\{b\sin(180°-A)\}^2=(b\sin A)^2$，

$\mathrm{BH}^2=\{c+b\cos(180°-A)\}^2=(c-b\cos A)^2$

これらを①″ に代入すると　$a^2=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2$

$$a^2=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A$$

$b^2\sin^2 A+b^2\cos^2 A=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)=b^2$ より　　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ についても同様に証明できる。したがって△ABC において等式 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ，$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ が成り立つ。

ポイント　頂点から対辺へ垂線を引き，三平方の定理を用いれば余弦定理が証明できる。