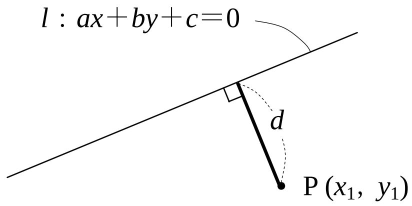
点と直線の距離

直線 l：$ax+by+c=0$ と点 P $(x_1,\ y_1)$の距離 d は

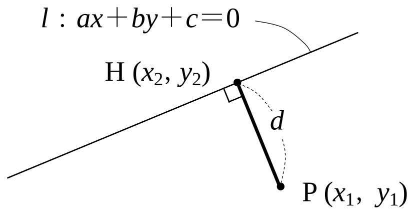
$$\boldsymbol{d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$



証明その１

点 P は直線 l 上にない点とし，点 P から直線 l に引いた垂線と直線 l との交点を H $(x_2,\ y_2)$ とする。

求める点と直線の距離 d は線分 PH の長さである。



(ⅰ)　$a\neq0$ かつ $b\neq0$ のとき

PH⊥l から　$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(-\dfrac{a}{b}\right)=-1$　　すなわち　$\dfrac{x_2-x_1}{a}=\dfrac{y_2-y_1}{b}$

この式の値を k とおくと　　$x_2-x_1=ak,\ y_2-y_1=bk$　……①

点 H $(x_2,\ y_2)$ は，直線 l 上にあるから　$ax_2+by_2+c=0$　……②

①，②から x_2，y_2 を消去すると　$a(ak+x_1)+b(bk+y_1)+c=0$

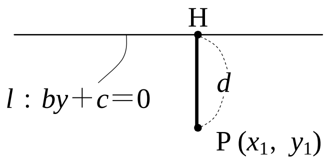
これから　$(a^2+b^2)k+ax_1+by_1+c=0$　　$a^2+b^2\neq0$ であるから　$k=-\dfrac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$　……③

①，③から　$\mathrm{PH}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(ak)^2+(bk)^2=(a^2+b^2)k^2=\dfrac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}$

したがって　$\mathrm{PH}=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

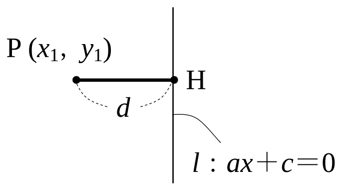
(ⅱ)　$a=0$ かつ $b\neq0$ のとき

$\mathrm{PH}=\left|-\dfrac{c}{b}-y_1\right|=\dfrac{|by_1+c|}{\sqrt{b^2}}$ より，$\mathrm{PH}=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$　に含まれる。



(ⅲ)　$a\neq0$ かつ $b=0$ のとき

$\mathrm{PH}=\left|-\dfrac{c}{a}-x_1\right|=\dfrac{|ax_1+c|}{\sqrt{a^2}}$ より，$\mathrm{PH}=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$　に含まれる。



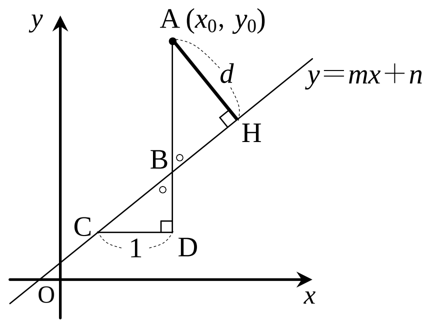
また，点 P が直線 l 上にあるとき，点と直線の距離は 0 であり，$ax_1+by_1+c=0$ であるから

$\mathrm{PH}=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$　に含まれる。l は直線を表すので $a=0$ かつ $b=0$ とはならない。

以上から，任意の点 P $(x_1,\ y_1)$と直線 l：$ax+by+c=0$ の距離 d は　$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ポイント　点 P から直線 l へ垂線を引き，交点 H $(x_2,\ y_2)$を考える。x_2，y_2 が満たす条件から，PH を x_2，y_2 を消去して a，b，c，x_1，y_1 で表す。

証明その２



(ⅰ)　座標軸に平行でない直線 $y=mx+n$ と，その直線上にない点 A $(x_0,\ y_0)$ の距離 d を考える。

右の図において　△ABH∽△CBD

これから　AB：AH＝CB：CD

ここで，B $(x_0,\ mx_0+n)$ より　$AB=|y_0-(mx_0+n)|$

図から　AH＝d，CD＝1

また，CD＝1，BD＝m より　$CB=\sqrt{1+m^2}$

よって　$|y_0-(mx_0+n)|:d=\sqrt{1+m^2}:1$

したがって　$d=\dfrac{|y_0-mx_0-n|}{\sqrt{1+m^2}}$　……①

$y=mx+n$ を変形すると　$mx-y+n=0$　　これから　$-bmx+by-bn=0$

これと，$ax+by+c=0$ を比較すると　$m=-\dfrac{a}{b}$，$n=-\dfrac{c}{b}$

これらを①に代入して整理すると　$d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(ⅱ)　直線が座標軸に平行な場合や，点が直線上にある場合についても，証明その１と同様にして

$d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ が成り立つことが証明できる。

以上から，任意の点 P$(x_1,\ y_1)$と直線 $l:ax+by+c=0$ の距離 d は　$d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ポイント　座標平面上で三角形の相似を考える。図のように△CBD において，CD＝1 とすると他の辺が m を用いて表すことができる。

コメント　証明その１は，点と直線の距離を２点間の距離として求める方法で，
証明その２は，三角形の辺として相似を利用して求める方法です。
このほかにベクトルや，三角関数などを利用した証明があります。