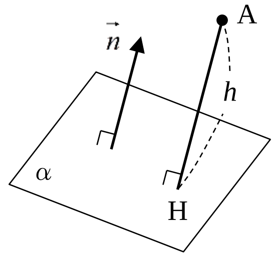
点と平面の距離

点 A $(x_1,\ y_1,\ z_1)$と平面α ：$ax+by+cz+d=0$ との距離 h は

$$\boldsymbol{h=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

証明



点 A を通り平面αに垂直な直線と平面αとの交点を

H$(x_2,\ y_2,\ z_2)$とする。また，平面αの法線ベクトルを

$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$とする。

点 A が平面α上の点である場合は　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\vec{0}$

点 A が平面α上の点でない場合は　$\overrightarrow{\mathrm{AH}} /\!/ \vec{n}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$（$k$ は実数）とおける。

これから　$(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)=k(a,\ b,\ c)$

したがって　$x_2=x_1+ak,\ y_2=y_1+bk,\ z_2=z_1+ck$　……①

ここで，点 H は平面α上の点であるから　$ax_2+by_2+cz_2+d=0$　……②

①を②に代入すると　$a(x_1+ak)+b(y_1+bk)+c(z_1+ck)+d=0$

$(a^2+b^2+c^2)k+ax_1+by_1+cz_1+d=0$

$\vec{n}\neq\vec{0}$ であるから　$a^2+b^2+c^2\neq0$　　よって，k について整理すると　$k=-\dfrac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}$

点 A と平面αの距離 h は，線分 AH の長さであるから

$$h=\mathrm{AH}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=|k\vec{n}|=|k||\vec{n}|=\left|-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ポイント　点と平面の距離を示す線分が，平面の法線ベクトルと平行であることを利用する。