対数の性質

$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ で，k が実数のとき

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{\log_a MN=\log_a M+\log_a N}$

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N}$

$\boxed{3}$ $\boldsymbol{\log_a M^k=k\log_a M}$

証明$\boxed{1}$

$\log_a M=x$，$\log_a N=y$ とおくと　$M=a^x$，$N=a^y$

このとき　$MN=a^x a^y=a^{x+y}$

よって　$\log_a MN=x+y=\log_a M+\log_a N$

証明$\boxed{2}$

$\log_a M=x$，$\log_a N=y$ とおくと　$M=a^x$，$N=a^y$

このとき　$\dfrac{M}{N}=\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

よって　$\log_a \dfrac{M}{N}=x-y=\log_a M-\log_a N$

証明$\boxed{3}$

$\log_a M=x$ とおくと　$M=a^x$

このとき　$M^k=(a^x)^k=a^{kx}$

よって　$\log_a M^k=kx=k\log_a M$

底の変換公式

a，b，c は正の数で，$a\neq 1$，$c\neq 1$ のとき　$\boldsymbol{\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}}$

証明

$\log_a b=r$ とおくと　$a^r=b$

この両辺の c を底とする対数を考えると　$\log_c a^r=\log_c b$

対数の性質$\boxed{3}$から　$r\log_c a=\log_c b$

$a\neq 1$ より $\log_c a\neq 0$ であるから　$r=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　　すなわち　$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

ポイント　対数の定義と指数法則を用いる。