1　等差数列

等差数列$\{a_n\}$の初項を a，公差を d，末項を l，一般項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$a_n=a+(n-1)d,\qquad S_n=\frac{1}{2}n(a+l)=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

2　等比数列

等比数列$\{a_n\}$の初項を a，公比を r，一般項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$a_n=ar^{n-1}$$

$r\neq1$ のとき　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$，　　$r=1$ のとき　$S_n=na$

証明 1

・$a_1=a$，$a_2-a_1=d$，$a_3-a_2=d$，……，$a_n-a_{n-1}=d$　の辺々を加えると　$a_n=a+(n-1)d$

・$l=a+(n-1)d$ である。

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$，$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots\cdots+a_1$　の辺々を加えると

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots\cdots+(a_n+a_1)$$

ここで　$a_k+a_{n-k+1}=a+(k-1)d+a+\{(n-k+1)-1\}d=2a+(n-1)d$

よって　$2S_n=n\{2a+(n-1)d\}$　　したがって　$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

証明 2

・$a_2=ar$，$a_3=a_2r$，……，$a_n=a_{n-1}r$　　これらより　$a_n=ar^{n-1}$

・$r\neq1$ のとき

$S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}$　……①　　$rS_n=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^n$　……②

①－②から　$(1-r)S_n=a-ar^n=a(1-r^n)$　　$r\neq1$ から　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$r=1$ のとき，すべての項が a であるから　$S_n=na$

1　等差中項

数列 a，b，c が等差数列のとき，b を a と c の等差中項といい，　$2b=a+c$　が成り立つ。

2　等比中項

数列 a，b，c が等比数列のとき，b を a と c の等比中項といい，　$b^2=ac$　が成り立つ。

証明 1

公差を d とすると　$b=a+d$，$c=a+2d$　　よって　$a+c=2a+2d=2(a+d)=2b$

証明 2

公比を r とすると　$b=ar$，$c=ar^2$　　よって　$ac=a\cdot ar^2=(ar)^2=b^2$

ポイント　各項を，最初の項と公差または公比を用いて表す。

Σ の公式

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ 　　 $\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ 　　 $\boxed{4}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$ 　　ただし，c は定数

証明 $\boxed{1}$

1，2，3，…… は，初項 1，公差 1 の等比数列であるから

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots\cdots+n = \frac{1}{2}n\{2\cdot1+(n-1)\cdot1\} = \frac{1}{2}n(n+1)$$

証明 $\boxed{2}$

恒等式$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$ の x に，順に 1，2，3，……，n を代入すると

$$2^3=1+3\cdot1+3\cdot1^2+1^3$$
$$3^3=1+3\cdot2+3\cdot2^2+2^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)^3=1+3\cdot n+3\cdot n^2+n^3$$

これら n 個の等式の辺々を加えると　$\displaystyle (n+1)^3=n+3\sum_{k=1}^{n} k+3\sum_{k=1}^{n} k^2+1^3$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ であるから　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-n-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-1\right\} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

証明 $\boxed{3}$

恒等式$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$ の x に，順に 1，2，3，……，n を代入すると

$$2^4=1+4\cdot1+6\cdot1^2+4\cdot1^3+1^4$$
$$3^4=1+4\cdot2+6\cdot2^2+4\cdot2^3+2^4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)^4=1+4\cdot n+6\cdot n^2+4\cdot n^3+n^4$$

これら n 個の等式の辺々を加えると　$\displaystyle (n+1)^4=n+4\sum_{k=1}^{n} k+6\sum_{k=1}^{n} k^2+4\sum_{k=1}^{n} k^3+1^4$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\left\{(n+1)^4-n-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-1\right\} = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

証明 $\boxed{4}$

すべての項が c であるから　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$

ポイント　$\boxed{1}$，$\boxed{4}$は，等差数列，等比数列の和の公式による。$\boxed{2}$，$\boxed{3}$は，恒等式 $(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$ ，$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$ の x に，順に 1，2，3，……，n を代入し辺々を加えると，左辺と，右辺の末項が相殺される。