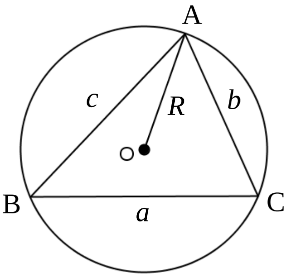
正弦定理

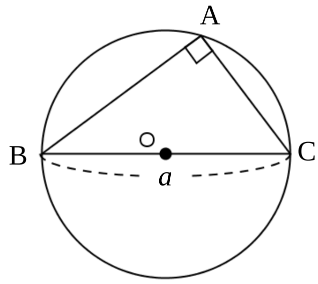
△ABC において，頂点 A，B，C における角の大きさを A，B，C，その対辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c，またその外接円の半径を R とすると，次の等式が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



証明

$\dfrac{a}{\sin A}=2R$　を証明する。△ABC の外接円の中心を O とする。

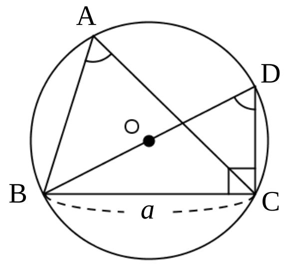


(ⅰ)　$A=90^\circ$ のとき，BC は円 O の直径であるから

$a=2R$，　$\sin A=1$ より

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

が成り立つ。



(ⅱ)　$A<90^\circ$ のとき，右の図のように直線 BO と円 O との交点で点 B でない点を D とすると，円周角の定理により

$A=\angle\mathrm{BDC}$

また，$\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$，$\mathrm{BD}=2R$ より

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

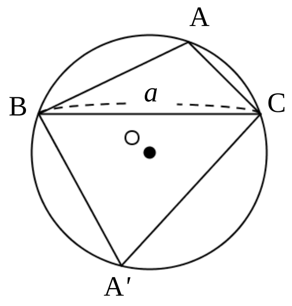
が成り立つ。

(ⅲ)　$A>90^\circ$ のとき，円 O 上で，弧 BAC の上にない点 A′ をとり，$\angle\mathrm{BA'C}=A'$　とおけば　$\sin A=\sin(180^\circ-A')=\sin A'$

$A'<180^\circ$ であるから，(ⅱ)より

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\sin A'}=2R$$

が成り立つ。



$\dfrac{b}{\sin B}=2R$，$\dfrac{c}{\sin C}=2R$ についても同様に証明できる。したがって，△ABC において

等式 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ が成り立つ。

ポイント　円周角の定理により，注目している角と同じ角を，円の中心を通るように作る。直径が $2R$ であることと，新しくできた三角形が直角三角形であることから等式が証明できる。