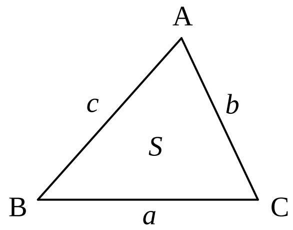
三角形の面積

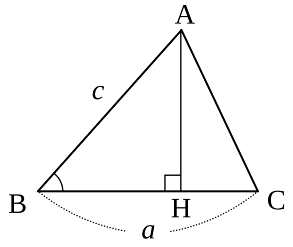
△ABC において，頂点 A，B，C における角の大きさを A，B，C，その対辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c，面積を S とすると，次の等式が成り立つ。

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C}$$



証明

$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B$ を証明する。△ABC の頂点 A から対辺 BC またはその延長に垂線を引き，その交点を H とする。

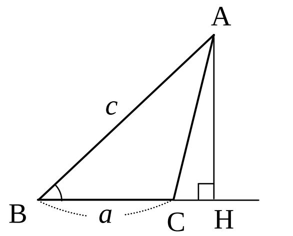


(ｉ)　点 H が辺 BC 上，または，辺 BC の C 側の延長上にあるとき

$$\mathrm{AH}=c\sin B$$

三角形の面積は　$\dfrac{1}{2}\times$(底辺)$\times$(高さ)　であるから

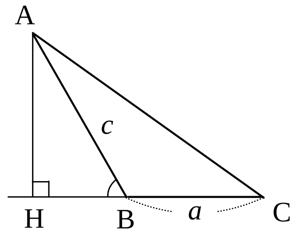
$$S=\frac{1}{2}ac\sin B$$



(ⅱ)　点 H が辺 BC の B 側の延長上にあるとき

$$\mathrm{AH}=c\sin\angle\mathrm{ABH}=c\sin(180°-B)=c\sin B$$

よって　$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B$



$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ についても同様に証明できる。

したがって，△ABC において　等式 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ が成り立つ。

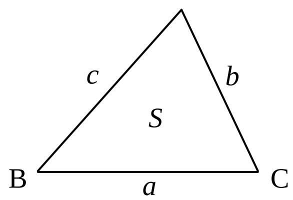
ポイント　三角形の高さを，辺の長さと正弦を用いて表し，
(三角形の面積)$=\dfrac{1}{2}\times$(底辺)$\times$(高さ)　に代入すればよい。

ヘロンの公式

△ABC において，頂点 A，B，C における角の大きさを A，B，C，その対辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，面積を S とすると，

等式 $\boldsymbol{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

が成り立つ。



$s=\dfrac{a+b+c}{2}$

証明

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　……①

ここで，$\sin^2A=1-\cos^2A=(1+\cos A)(1-\cos A)$に①を代入すると

$$\sin^2A=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$=\frac{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}}{4(bc)^2}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4(bc)^2}\quad\cdots\cdots②$$

$s=\dfrac{a+b+c}{2}$から　$b+c+a=2s$

$$b+c-a=2s-2a=2(s-a)$$
$$a+b-c=2s-2c=2(s-c)$$
$$a-b+c=2s-2b=2(s-b)$$

これらを②に代入すると

$$\sin^2A=\frac{2s\cdot2(s-a)\cdot2(s-c)\cdot2(s-b)}{4(bc)^2}=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{(bc)^2}$$

$0\leqq\sin A\leqq1$ であるから

$$\sin A=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

よって　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\cdot\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ポイント　$\sin A$ を辺の長さで表し，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ に代入すればよい。

コメント　三角形の面積を求めるとき，次のように使い分けると速く計算ができる。

2 辺とその間の角がわかっているとき　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

3 辺がわかっているとき　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ただし，「3 辺がわかっている」→「余弦定理から $\cos A$ を求める」

→「三角比の相互関係から $\sin A$ を求める」→「$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ を用いる」

という流れでも三角形の面積を求めることができるので，ヘロンの公式は必ずしも覚える必要はない。