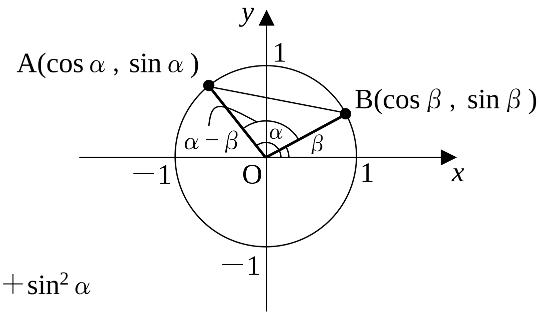
三角関数の加法定理

$\boxed{1}$ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　　$\boxed{2}$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\boxed{3}$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　　$\boxed{4}$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\boxed{5}$ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　　$\boxed{6}$ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

証明



右の図のように，角 α，β の動径と単位円の交点を
それぞれ A，B とする。

2 点 A，B の座標は　A($\cos\alpha$，$\sin\alpha$)，B($\cos\beta$，$\sin\beta$)
であるから，2 点間の距離の公式により

$$\begin{aligned}AB^2&=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2\\&=\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\beta\sin\alpha+\sin^2\alpha\\&=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)-2(\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha)\\&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\qquad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

また，$\angle AOB=\alpha-\beta$ から，△AOB に余弦定理を用いると

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\angle AOB=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)\qquad\cdots\cdots②$$

①，②から　$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$

よって　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　……③

以上により，公式$\boxed{4}$が証明できた。③の β を $-\beta$ に置き換えると，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ から　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　よって，公式$\boxed{3}$が証明できた。

また，③の α を $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ に置き換えると　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$

ここで，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)$であり，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

であるから　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　……④　よって，公式$\boxed{1}$が証明できた。

④の β を $-\beta$ に置き換えると　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$　よって，公式$\boxed{2}$が証明できた。

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ であることを利用して　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

この右辺の分母と分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ると

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot1+1\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

よって，公式$\boxed{5}$が証明できた。この等式の β を $-\beta$ に置き換えると，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ から

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$　　よって，公式$\boxed{6}$が証明できた。

2 倍角の公式

$\boxed{7}$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\boxed{8}$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\boxed{9}$ $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

証明

三角関数の加法定理の公式$\boxed{1}$において，$\beta = \alpha$ とおくと　$\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha$

すなわち　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\beta$　　　よって，公式$\boxed{7}$が証明できた。

三角関数の加法定理の公式$\boxed{3}$において，$\beta = \alpha$ とおくと　$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha$

すなわち　$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$　　　ここで，$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$，　$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ であるから

$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$，　$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

よって，公式$\boxed{8}$が証明できた。

三角関数の加法定理の公式$\boxed{5}$において，$\beta = \alpha$ とおくと　$\tan(\alpha + \alpha) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha}$

すなわち　$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$　　　よって，公式$\boxed{9}$が証明できた。

半角の公式

$\boxed{10}$ $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$　　$\boxed{11}$ $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$　　$\boxed{12}$ $\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

証明

2 倍角の公式$\boxed{8}$から　$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$　　これを変形すると　$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

この等式の α を $\dfrac{\alpha}{2}$ に置き換えると　$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$　　よって，公式$\boxed{10}$が証明できた。

2 倍角の公式$\boxed{8}$から　$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$　　これを変形すると　$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

この等式の α を $\dfrac{\alpha}{2}$ に置き換えると　$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$　　よって，公式$\boxed{11}$が証明できた。

公式$\boxed{10}$，$\boxed{11}$から　$\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$　　よって，公式$\boxed{12}$が証明できた。

三角関数の積を和・差になおす公式（積和公式）

$\boxed{１３}$　$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$　　$\boxed{１４}$　$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\boxed{１５}$　$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$　　$\boxed{１６}$　$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

三角関数の和・差を積になおす公式（和積公式）

$\boxed{１７}$　$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　　$\boxed{１８}$　$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\boxed{１９}$　$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　　$\boxed{２０}$　$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

証明

三角関数の加法定理の公式$\boxed{1}$，$\boxed{2}$から　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　……④

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$　……⑤

④，⑤の辺々を足すと　$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

整理すると　$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$　　よって，公式$\boxed{１３}$が証明できた。

④，⑤の辺々を引くと　$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$

整理すると　$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$　　よって，公式$\boxed{１４}$が証明できた。

三角関数の加法定理の公式$\boxed{3}$，$\boxed{4}$から　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　……⑥

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　……⑦

⑥，⑦の辺々を足すと　$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$

整理すると　$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$　　よって，公式$\boxed{１５}$が証明できた。

⑥，⑦の辺々を引くと　$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$

整理すると　$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$　　よって，公式$\boxed{１６}$が証明できた。

積和公式$\boxed{１３}$において，$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおくと，　$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$，$\beta=\dfrac{A-B}{2}$ であるから

$\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{1}{2}(\sin A+\sin B)$　　よって　$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

これから，公式$\boxed{１７}$が証明できた。　公式$\boxed{１４}$，$\boxed{１５}$，$\boxed{１６}$に，$\boxed{１７}$の証明と同様に

$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$，$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$，$\beta=\dfrac{A-B}{2}$を代入すると，公式$\boxed{１８}$，$\boxed{１９}$，$\boxed{２０}$が証明できる。

ポイント　三角関数の加法定理の公式$\boxed{4}$は，2 点間の距離の公式と余弦定理を利用することで証明できる。公式$\boxed{1}$～$\boxed{3}$，$\boxed{5}$～$\boxed{２０}$は，公式$\boxed{4}$をもとに証明できる。