【準備】

ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

で定義される。定義から，内積は**実数**である。$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

内積と成分

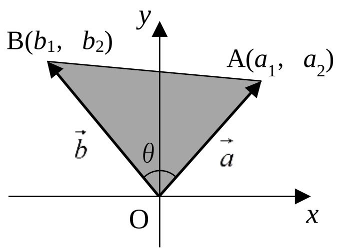
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$のとき　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$

証明

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は $\vec{0}$ でなく，平行でないとする。

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるような 3 点 O，A，B をとり，

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とする。



△OAB において，余弦定理を用いると

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta \quad \cdots\cdots ①$$

ここで　$\mathrm{AB}^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$，$\mathrm{OA}^2=|\vec{a}|^2$，$\mathrm{OB}^2=|\vec{b}|^2$

$\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$

であるから，①は次のように表される。

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b} \quad \cdots\cdots ②$$

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$として，②を成分で表すと

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(a_1{}^2+a_2{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2)-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$b_1{}^2-2b_1a_1+a_1{}^2+b_2{}^2-2b_2a_2+a_2{}^2=a_1{}^2+a_2{}^2+b_1{}^2+b_2{}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

整理すると　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

これは，$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときや，$\vec{a}/\!/\vec{b}$ のときも成り立つ。

ポイント　$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる 3 点 O，A，B から△OAB を考え，この三角形に余弦定理を用いると公式を導くことができる。最後に，$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときや，$\vec{a}/\!/\vec{b}$ のときも公式が成り立つことを確認する。