n 個のものから r 個取った組合せの総数　$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}}$

が整数であることを示す。

〈注意〉証明には，数学 B「数列」で学習する数学的帰納法を用います。

〈注意〉「n 個のものから r 個取った組合せの総数」という定義から，${}_n\mathrm{C}_r$ が整数（厳密に言えば自然数）であることは明らか，としてもよいですが，ここでは数学的帰納法を用いた証明を紹介します。

証明

まず，${}_{n+1}\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{r-1}+{}_n\mathrm{C}_r$　(n は自然数，r は $0\leqq r\leqq n$ を満たす整数) が成り立つことを示す。

$$\text{（右辺）}={}_n\mathrm{C}_{r-1}+{}_n\mathrm{C}_r=\frac{n\,!}{(r-1)\,!\,(n-r+1)\,!}+\frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}$$

$$=\frac{n\,!}{(r-1)\,!\{(n-r+1)\cdot(n-r)\,!\}}+\frac{n\,!}{r\cdot(r-1)\,!\,(n-r)\,!}$$

$$=\frac{r\cdot n\,!+(n-r+1)\cdot n\,!}{r(n-r+1)\cdot(r-1)\,!\,(n-r)\,!}=\frac{\{r+(n-r+1)\}\cdot n\,!}{\{r\cdot(r-1)\,!\}\{(n-r+1)\cdot(n-r)\,!\}}$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n\,!}{r\,!\,(n-r+1)\,!}=\frac{(n+1)\,!}{r\,!\{(n+1)-r\}\,!}={}_{n+1}\mathrm{C}_r=\text{（左辺）}$$

$m\,!=m\cdot(m-1)\,!$ という変形を利用する。

次に，自然数 n と $0\leqq r\leqq n$ を満たす整数 r に対して，${}_n\mathrm{C}_r$ が整数であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(ⅰ)　$n=1$ のとき

　$0\leqq r\leqq 1$ を満たす整数 r は　$r=0,\ 1$　　${}_1\mathrm{C}_0={}_1\mathrm{C}_1=1$ より，整数である。

(ⅱ)　$n=k$ のとき，$0\leqq r\leqq k$ を満たす整数 r に対して，${}_k\mathrm{C}_r$ が整数であると仮定する。

　このとき，$n=k+1$ について考える。

　①　${}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}={}_{k+1}\mathrm{C}_0=1$ より，整数である。

　②　$1\leqq r\leqq k$ を満たす整数 r に対して，

$${}_{k+1}\mathrm{C}_r={}_k\mathrm{C}_{r-1}+{}_k\mathrm{C}_r$$

　であり，仮定より ${}_k\mathrm{C}_{r-1}$，${}_k\mathrm{C}_r$ は整数であるから，${}_{k+1}\mathrm{C}_r$ は整数である。

$1\leqq r\leqq k$ のとき，$0\leqq r-1\leqq k-1\leqq k$，$0\leqq 1\leqq r\leqq k$ であるから，${}_k\mathrm{C}_{r-1}$，${}_k\mathrm{C}_r$ も整数である。

　①，②より，$n=k+1$ のときも ${}_n\mathrm{C}_r$ は整数である。

(ⅰ)，(ⅱ)から，すべての自然数 n と $0\leqq r\leqq n$ を満たす整数 r に対して，${}_n\mathrm{C}_r$ は整数である。

ポイント　数学的帰納法を用いるため，${}_{n+1}\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{r-1}+{}_n\mathrm{C}_r$ という式変形を利用する。

コメント　定義式 ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r\,!}$ から，「連続する r 個の整数の積は $r\,!$ で割り切れる」ことを示してもよい。