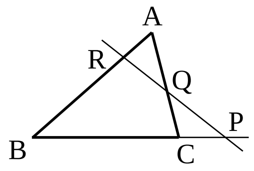
1　**メネラウスの定理**

△ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上，またはそれらの延長上にそれぞれ三角形の頂点と異なる点 P，Q，R がある。3 点 P，Q，R が一直線上にあるならば，次の等式が成り立つ。

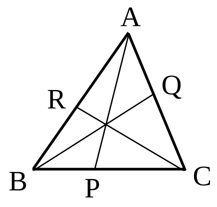
$$\frac{\mathbf{BP}}{\mathbf{PC}}\cdot\frac{\mathbf{CQ}}{\mathbf{QA}}\cdot\frac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}}=\mathbf{1}$$



2　**チェバの定理**

△ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R がある。3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交わるならば，次の等式が成り立つ。

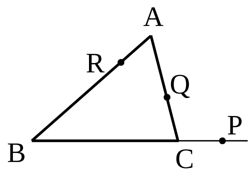
$$\frac{\mathbf{BP}}{\mathbf{PC}}\cdot\frac{\mathbf{CQ}}{\mathbf{QA}}\cdot\frac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}}=\mathbf{1}$$



3　**メネラウスの定理の逆**

△ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上，またはそれらの延長上にそれぞれ点 P，Q，R があり，この 3 点のうちの 1 つまたは 3 つが辺の延長上にある。

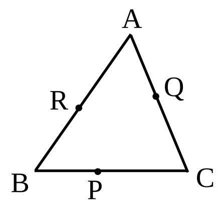
$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ が成り立つならば，3 点 P，Q，R は一直線上にある。



4　**チェバの定理の逆**

△ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R がある。

$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ が成り立つならば，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる。



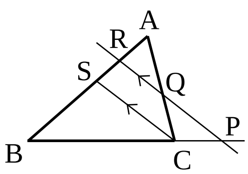
証明 1

3 点 P，Q，R が一直線上にあるとき，点 C を通り，直線 PQ に平行な直線と辺 AB の交点を S とすると

$$\frac{BP}{PC}=\frac{BR}{RS},\quad \frac{CQ}{QA}=\frac{SR}{RA}$$

したがって

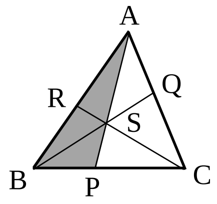
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BR}{RS}\cdot\frac{SR}{RA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



ポイント　補助線を引き，平行線と比の性質を利用する。

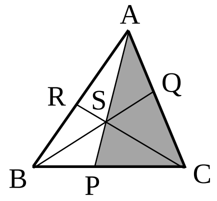
証明 $\boxed{\mathbf{2}}$

3 直線 AP，BQ，CR の交点を S とする。



△ABP と直線 CR について，メネラウスの定理により

$$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PS}{SA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \qquad \cdots\cdots①$$



また，△APC と直線 BQ について，メネラウスの定理により

$$\frac{PB}{BC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AS}{SP}=1 \qquad \cdots\cdots②$$

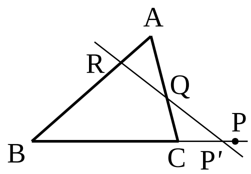
①の各辺に②の各辺を掛けて整理すると

$$\boldsymbol{\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1}$$

ポイント　メネラウスの定理を 2 回適用する。

証明 $\boxed{\mathbf{3}}$

直線 QR と直線 BC の交点を P′ とすると
メネラウスの定理により



$$\frac{BP'}{P'C}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

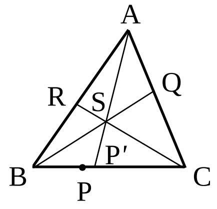
これと仮定の $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$ により　$\dfrac{BP'}{P'C}=\dfrac{BP}{PC}$

よって，P′ は P に一致する。したがって，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

ポイント　直線 QR と直線 BC の交点を P′ とし，この P′ と仮定の点 P が一致することを示す。

証明 $\boxed{\mathbf{4}}$

直線 BQ と直線 CR の交点を S とし，
直線 AS と辺 BC の交点を P′ とする。



チェバの定理により　$\dfrac{BP'}{P'C}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$

これと仮定の $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$ により　$\dfrac{BP'}{P'C}=\dfrac{BP}{PC}$

よって，P′ は P に一致する。したがって，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点 S で交わる。

ポイント　仮定の点 Q，R を含むチェバの定理を満たす 3 点 P′，Q，R を考える。
このP′ と仮定の点 P が一致することを示す。