共役な複素数の性質

z，w は複素数とする。

$\boxed{1}$ $\overline{\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}}=\bar{\boldsymbol{z}}+\bar{\boldsymbol{w}}$　　$\boxed{2}$ $\overline{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{w}}=\bar{\boldsymbol{z}}-\bar{\boldsymbol{w}}$　　$\boxed{3}$ $\overline{\boldsymbol{zw}}=\bar{\boldsymbol{z}}\,\bar{\boldsymbol{w}}$

$\boxed{4}$ $\overline{\left(\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{w}}\right)}=\frac{\bar{\boldsymbol{z}}}{\bar{\boldsymbol{w}}}$　$(\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{0})$　　$\boxed{5}$ $\overline{(\bar{\boldsymbol{z}})}=\boldsymbol{z}$

a，b，c，d を実数とし，複素数 z，w を $z=a+bi$，$w=c+di$ とする。

証明$\boxed{1}$

$\overline{z+w}=\overline{(a+bi)+(c+di)}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a+c)-(b+d)i$

$\bar{z}+\bar{w}=\overline{(a+bi)}+\overline{(c+di)}=a-bi+c-di=(a+c)-(b+d)i$

よって　$\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$

証明$\boxed{2}$

$\overline{z-w}=\overline{(a+bi)-(c+di)}=\overline{(a-c)+(b-d)i}=(a-c)-(b-d)i$

$\bar{z}-\bar{w}=\overline{(a+bi)}-\overline{(c+di)}=a-bi-(c-di)=(a-c)-(b-d)i$

よって　$\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$

証明$\boxed{3}$

$\overline{zw}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{ac+adi+bci+bdi^2}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\bar{z}\,\bar{w}=\overline{(a+bi)}\,\overline{(c+di)}=(a-bi)(c-di)=ac-adi-bci+bdi^2=(ac-bd)-(ad+bc)i$

よって　$\overline{zw}=\bar{z}\,\bar{w}$

証明$\boxed{4}$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)}=\overline{\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}}=\overline{\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}}=\overline{\frac{(ac+bd)-(ad-bc)i}{c^2+d^2}}$$

$$=\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{c^2+d^2}$$

$$\frac{\bar{z}}{\bar{w}}=\frac{\overline{a+bi}}{\overline{c+di}}=\frac{a-bi}{c-di}=\frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)}=\frac{ac+adi-bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}=\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{c^2+d^2}$$

よって　$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

証明$\boxed{5}$

$\overline{(\bar{z})}=\overline{(\overline{a+bi})}=\overline{a-bi}=a+bi=z$

よって　$\overline{(\bar{z})}=z$

ポイント　$z=a+bi$，$w=c+di$ とおいて，具体的に計算すれば証明できる。