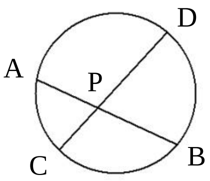
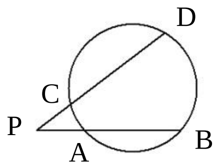
1　円の 2 つの弦 AB，CD の交点，またはそれらの延長の交点を P とすると，次の等式が成り立つ。

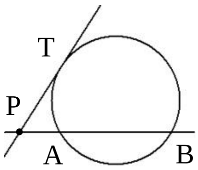
PA・PB＝PC・PD





2　円の外部の点 P から円に引いた接線の接点を T とする。点 P を通りこの円と 2 点 A，B が交わる直線を引く。このとき，次の等式が成り立つ。

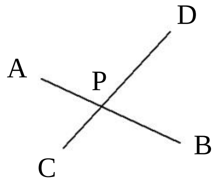
PA・PB＝PT^2

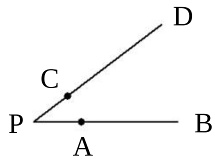


3　2 つの線分 AB，CD の交点，またはそれらの 延長の交点を P とすると，

PA・PB＝PC・PD

が成り立つならば，4 点 A，B，C，D は同一円周上にある。

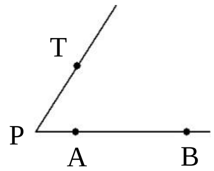




4　点 P を通る 2 つの半直線 PA，PT を引き，

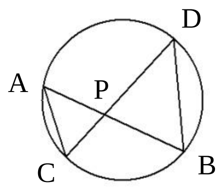
PT^2＝PA・PB

となるように線分 PA 上，またはその延長上に点 B をとれば，△TAB の外接円は点 T において直線 PT に接する。



証明 1

(ⅰ)　左の図の場合



点 A と C，点 B と D を結ぶ。

△APC と△DPB において

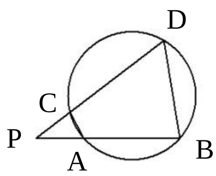
∠APC＝∠DPB（対頂角）

∠PAC＝∠PDB（弧 CB に対する円周角）

これから　△APC ∽ △DPB

よって　PA：PD＝PC：PB　　　したがって　PA・PB＝PC・PD

(ⅱ)　右の図の場合



点 A と C，点 B と D を結ぶ。

△APC と△DPB において

∠APC＝∠DPB（共通）

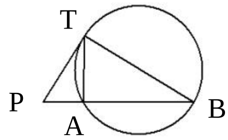
∠PAC＝180° －∠CAB＝∠PDB（円に内接する四角形の性質）

これから　△APC ∽ △DPB

よって　PA：PD＝PC：PB　　　したがって　PA・PB＝PC・PD

ポイント　円周角の定理, 円に内接する四角形の性質から 2 つの三角形が相似であることを示す。相似な三角形の対応する辺の比が等しいことを利用する。

証明 2



点 T と A，点 T と B を結ぶ。

$\triangle PTA$ と $\triangle PBT$ において

$\angle APT = \angle TPB$（共通）

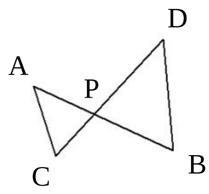
$\angle PTA = \angle PBT$（接弦定理）

これから　$\triangle PTA \backsim \triangle PBT$

よって　$PA : PT = PT : PB$　　　したがって　$PA \cdot PB = PT^2$

> **ポイント**　接弦定理から 2 つの三角形が相似であることを示す。相似な三角形の対応する辺の比が等しいことを利用する。

証明 3



(ⅰ)　左の図の場合

点 A と C，点 B と D を結ぶ。

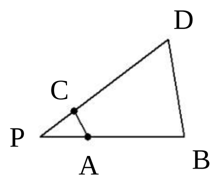
$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ から　　$PA : PD = PC : PB$

また　$\angle APC = \angle DPB$（対頂角）

これから　$\triangle APC \backsim \triangle DPB$

よって　$\angle PAC = \angle PDB$

したがって，4 点 A，B，C，D は同一円周上にある。



(ⅱ)　右の図の場合

点 A と C，点 B と D を結ぶ。

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ から　　$PA : PD = PC : PB$

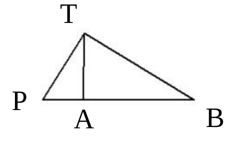
また　$\angle APC = \angle DPB$（共通）

これから　$\triangle APC \backsim \triangle DPB$　　よって　$\angle PAC = \angle PDB$

したがって，$\angle PAC = 180^\circ - \angle CAB = \angle PDB$ より，$\angle CAB + \angle CDB = 180^\circ$ であるから，円に内接する四角形の性質から，4 点 A，B，C，D は同一円周上にある。

> **ポイント**　与えられた条件から 2 つの三角形が相似であることを示し，円周角の定理の逆，円に内接する四角形の性質を利用する。

証明 4



点 T と A，点 T と B を結ぶ。

$PT^2 = PA \cdot PB$ から　$PT : PA = PB \cdot PT$

また　$\angle TPA = \angle BPT$（共通）

これから　$\triangle PTA \backsim \triangle PBT$　　よって　$\angle PTA = \angle PBT$

したがって，接弦定理の逆から，$\triangle TAB$ の外接円は点 T において直線 PT に接する。

> **ポイント**　条件から 2 つの三角形が相似であることを示し，接弦定理の逆を利用する。