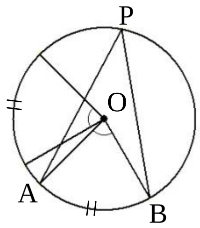
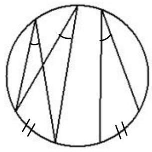
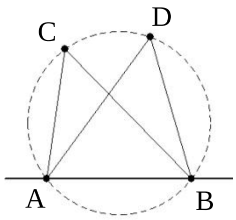
右の図の∠AOB を弧 AB に対する**中心角**，∠APB を弧 AB に対する**円周角**という。
等しい弧に対する中心角は等しく，同じ大きさの中心角に対する弧は等しい。



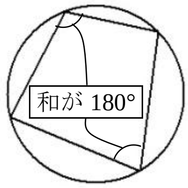
$\boxed{1}$ 円周角は同じ弧に対する中心角の半分である。
⇒半円に対する円周角は 90°



$\boxed{2}$ 1 つの円において，同じ弧または等しい弧に対する円周角は等しい。



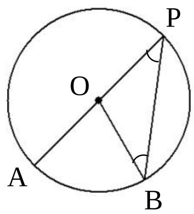
$\boxed{3}$ 2 点 C，D が直線 AB に関して同じ側にあり，∠ACB＝∠ADB ならば，点 A，B，C，D は同一円周上にある。



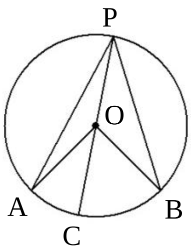
$\boxed{4}$ 円に内接する四角形の向かい合う角の和は 180° である。

$\boxed{5}$ 向かい合う角の和が 180° の四角形は円に内接する。

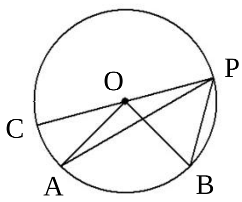
証明 $\boxed{1}$



(ⅰ) 3 点 P，O，A が一直線上にあるとき
∠AOB＝∠OPB＋∠OBP
ここで　OP＝OB より　∠OPB＝∠OBP
よって　∠AOB＝2∠OPB＝2∠APB
3 点 P，O，B が一直線上にあるときも同様に証明できる。

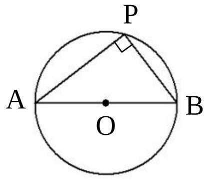


(ⅱ) 直線 PO と円との交点が弧 AB 上にあるとき
直線 PO と円との交点で，点 P でない点を C とする。
(ⅰ)から　∠AOC＝2∠APC
　　　　　∠BOC＝2∠BPC
よって　∠AOB＝∠AOC＋∠BOC＝2(∠APC＋∠BPC)＝2∠APB



(ⅲ) 直線 PO と円との交点が弧 AB 上にないとき
直線 PO と円との交点で，点 P でない点を C とする。
(ⅰ)から　∠COB＝2∠CPB
　　　　　∠COA＝2∠CPA
よって　∠AOB＝∠COB－∠COA＝2(∠CPB－∠CPA)＝2∠APB

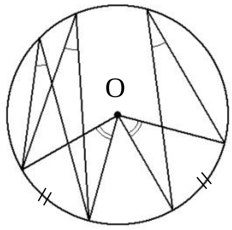
⇒半円に対する円周角は 90° であることの証明



$\boxed{1}$から　∠AOB＝2∠APB　　∠AOB＝180° であるから　∠APB＝$\frac{1}{2}$・180° ＝90°

ポイント　三角形の 1 つの外角は，その隣にない 2 つの内角の和に等しいことと，二等辺三角形の底角は等しいことを用いる。

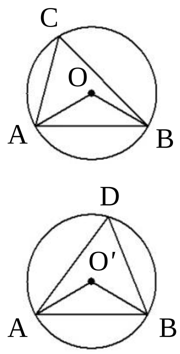
証明 $\boxed{2}$



1 つの円において，等しい弧に対する中心角は等しい。
また，$\boxed{1}$から，円周角は同じ弧に対する中心角の半分である。
よって，1 つの円において，同じ弧または等しい弧に対する中心角は等しい。

ポイント　弧に対する中心角は 1 つに定まることを用いる。

証明 $\boxed{3}$



$\triangle$ABC，$\triangle$ABD の外接円はそれぞれただ 1 つに定まり，それらの中心を O，O′ とする。
$\angle ACB = \angle ADB$ より　$\angle AOB = 2\angle ACB = 2\angle ADB = \angle AO'B$
$OA = OB$，$O'A = O'B$ であるから

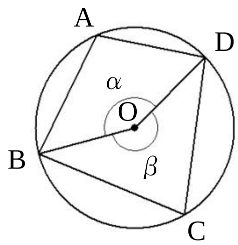
$$\angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(180° - \angle AOB) = \frac{1}{2}(180° - \angle AO'B) = \angle O'AB = \angle O'BA$$

AB は共通であるから，$\triangle OAB \equiv \triangle O'AB$ である。よって，点 O，O′ は一致する。
したがって，点 A，B，C，D は同一円上にある。

ポイント　一直線上にない 3 点を通る円はただ 1 つに定まることを用いる。

証明 $\boxed{4}$

円 O に内接する四角形を ABCD とする。右の図のように，$\angle BOD = \alpha$，その反対側の角を β とする。



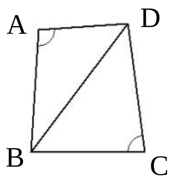
$$\angle BCD = \frac{1}{2}\alpha,\quad \angle BAD = \frac{1}{2}\beta$$

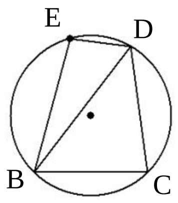
$$\alpha + \beta = 360° \text{ より}\qquad \angle BCD + \angle BAD = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180°$$

$\angle ABC + \angle ADC = 180°$ も同様に証明できる。

ポイント　円周角は中心角の半分であることと，1 点のまわりの角は 360° であることを用いる。

証明 $\boxed{5}$





四角形 ABCD において，$\angle BAD + \angle BCD = 180°$　……①
であるとする。
$\triangle$BCD の外接円を O とする。点 C を含まない弧 BD 上に点 E をとると
$\boxed{4}$から　$\angle BCD + \angle BED = 180°$　……②
①，②から　$\angle BAD = \angle BED$　　これより，$\boxed{3}$から，点 B，D，A，E は同一円周上にある。
この円は$\triangle$BED の外接円，すなわち円 O である。したがって，四角形 ABCD は円 O に内接する。

ポイント　$\boxed{4}$，$\boxed{3}$が利用できるように，三角形の外接円上に点をとる。