ド・モアブルの定理

n が整数のとき　$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

証明

等式「$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$」を①とする。

0 の極形式は考えないので，$\cos\theta+i\sin\theta\neq0$ である。

(i)　n が自然数のとき

[1]　$n=1$ のとき

(①の左辺)$=\cos\theta+i\sin\theta$，(①の右辺)$=\cos\theta+i\sin\theta$　　よって，$n=1$ のとき，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると　$(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$　……②

$n=k+1$ のときを考えると，②から

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}&=(\cos\theta+i\sin\theta)^k(\cos\theta+i\sin\theta)=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=\cos k\theta\cos\theta+i\cos k\theta\sin\theta+i\sin k\theta\cos\theta+i^2\sin k\theta\sin\theta\\&=(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)\end{aligned}$$

三角関数の加法定理　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

を適用すると　$(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}=\cos(k\theta+\theta)+i\sin(k\theta+\theta)=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$

よって，$n=k+1$ のときも①が成り立つ。

[1]，[2]から，すべての自然数 n について，①は成り立つ。

(ii)　$n=0$ のとき

(①の左辺)$=1$，(①の右辺)$=\cos0+i\sin0=1$　　よって，$n=0$ のときも①は成り立つ。

(iii)　n が負の整数のとき

$m=-n$ とおくと，m は自然数である。

$$(①の左辺)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^m}$$

(i)より，自然数mについて，$(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\cos m\theta+i\sin m\theta$ が成り立つから

$$(①の左辺)=\frac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta}$$

これから　
$$\begin{aligned}(①の左辺)&=\frac{(\cos m\theta-i\sin m\theta)}{(\cos m\theta+i\sin m\theta)(\cos m\theta-i\sin m\theta)}\\&=\frac{\cos m\theta-i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta-i^2\sin^2 m\theta}=\frac{\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)}{\cos^2 m\theta+\sin^2 m\theta}\\&=\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)=\cos n\theta+i\sin n\theta=(①の右辺)\end{aligned}$$

よって，n が負の整数のときも①は成り立つ。

(i)～(iii)から，n が整数のとき，①は成り立つ。

ポイント　n が自然数のときを数学的帰納法を利用して証明する。$n=0$ のときは自明であるので，自然数のときをもとに n が負の整数のときも成り立つことを証明すればよい。