x^n と定数の微分

$\boxed{1}$　正の整数 n について　$(x^n)'=nx^{n-1}$

$\boxed{2}$　定数 c について　$(c)'=0$

証明

$\boxed{1}$　二項定理により，$(x+h)^n=x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n$　であるから

$$(x^n)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left({}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^{n-1}\right)$$

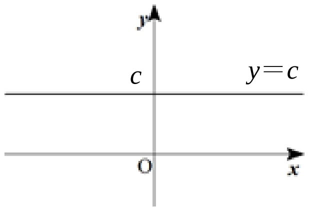
$$={}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}+\lim_{h\to 0}h\left({}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^{n-2}\right)={}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}=nx^{n-1}$$

$\boxed{2}$　c を定数とするとき，関数 $f(x)=c$ において $f(x+h)=c$ であるから，導関数は

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0$$

すなわち　$(c)'=0$



定数関数のグラフは x 軸に平行な直線であるから，その接線の傾きはつねに 0 である。

導関数の性質

k，l を定数とする。

$\boxed{3}$　$y=kf(x)$ ならば　$y'=kf'(x)$

$\boxed{4}$　$y=f(x)\pm g(x)$ ならば　$y'=f'(x)\pm g'(x)$

$\boxed{5}$　$y=kf(x)+lg(x)$ ならば　$y'=kf'(x)+lg'(x)$

証明

$\boxed{3}$　$y=kf(x)$のとき　$y'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{kf(x+h)-kf(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{k\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}=kf'(x)$$

$\boxed{4}$　$y=f(x)\pm g(x)$のとき　$y'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{f(x+h)\pm g(x+h)\}-\{f(x)\pm g(x)\}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\pm\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$=f'(x)\pm g'(x)$$

$\boxed{5}$　$y=kf(x)+lg(x)$のとき，性質$\boxed{3}$，$\boxed{4}$から

$$y'=\{kf(x)+lg(x)\}'=\{kf(x)\}'+\{lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)$$

$\boxed{3}$，$\boxed{4}$の証明では，次の数学Ⅲで学習する関数の極限値の性質を利用している。

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\beta$ のとき

$\lim\limits_{x\to a}kf(x)=k\alpha$　（k は定数）

$\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$

不定積分の性質

k，l を定数とする。

$\boxed{6}$ $\displaystyle\int \boldsymbol{kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx}$

$\boxed{7}$ $\displaystyle\int \{\boldsymbol{f(x) \pm g(x)}\}\,\boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{f(x)\,dx} \pm \int \boldsymbol{g(x)\,dx}$

$\boxed{8}$ $\displaystyle\int \{\boldsymbol{kf(x) + lg(x)}\}\,\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{k}\int \boldsymbol{f(x)\,dx} + \boldsymbol{l}\int \boldsymbol{g(x)\,dx}$

証明

$f(x)$，$g(x)$の原始関数の 1 つを，それぞれ $F(x)$，$G(x)$とすると，

$\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$，$\{F(x)\pm G(x)\}'=F'(x)\pm G'(x)=f(x)\pm g(x)$であるから

$\boxed{6}$ $\displaystyle\int kf(x)\,dx = kF(x) = k\int f(x)\,dx$

$\boxed{7}$ $\displaystyle\int \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = F(x) \pm G(x) = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

$\boxed{8}$ 性質$\boxed{6}$，$\boxed{7}$から $\displaystyle\int \{kf(x) + lg(x)\}\,dx = \int kf(x)\,dx + \int lg(x)\,dx = k\int f(x)\,dx + l\int g(x)\,dx$

定積分の性質

k，l を定数とする。

$\boxed{9}$ $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx}$

$\boxed{10}$ $\displaystyle\int_a^b \{\boldsymbol{f(x) \pm g(x)}\}\,\boldsymbol{dx} = \int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} \pm \int_a^b \boldsymbol{g(x)\,dx}$

$\boxed{11}$ $\displaystyle\int_a^b \{\boldsymbol{kf(x) + lg(x)}\}\,\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{k}\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} + \boldsymbol{l}\int_a^b \boldsymbol{g(x)\,dx}$

$\boxed{12}$ $\displaystyle\int_a^a \boldsymbol{f(x)\,dx = 0}$

$\boxed{13}$ $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} = -\int_b^a \boldsymbol{f(x)\,dx}$

$\boxed{14}$ $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int_a^c \boldsymbol{f(x)\,dx} + \int_c^b \boldsymbol{f(x)\,dx}$

証明

$f(x)$，$g(x)$の原始関数の 1 つを，それぞれ $F(x)$，$G(x)$とする。

$\boxed{9}$ $$\int_a^b kf(x)\,dx = \Big[kF(x)\Big]_a^b = kF(b) - kF(a) = k\{F(b) - F(a)\} = k\Big[F(x)\Big]_a^b = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$\boxed{１０}$ $$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \Big[F(x) \pm G(x)\Big]_a^b = \{F(b) \pm G(b)\} - \{F(a) \pm G(a)\}$$

$$= \{F(b) - F(a)\} \pm \{G(b) - G(a)\} = \Big[F(x)\Big]_a^b \pm \Big[G(x)\Big]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$\boxed{１１}$ 性質$\boxed{9}$，$\boxed{１０}$から $$\int_a^b \{kf(x) + lg(x)\}\,dx = \int_a^b kf(x)\,dx + \int_a^b lg(x)\,dx$$

$$= k\int_a^b f(x)\,dx + l\int_a^b g(x)\,dx$$

$\boxed{１２}$ $$\int_a^a f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

$\boxed{１３}$ $$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) = -\{F(a) - F(b)\} = -\Big[F(x)\Big]_b^a = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$\boxed{１４}$ $$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) = \{F(c) - F(a)\} + \{F(b) - F(c)\} = \Big[F(x)\Big]_a^c + \Big[F(x)\Big]_c^b$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ポイント　公式$\boxed{1}$は，二項定理を用いると証明できる。
導関数，不定積分，定積分の性質は，定義に立ち返ると証明できる。