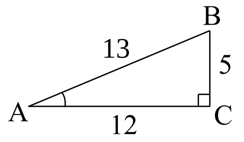
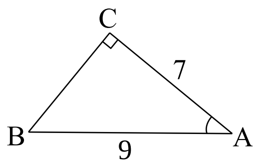
図形と計量

1

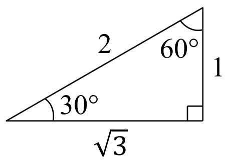
(1)　右の図の直角三角形 ABC において，
sin$A$，　cos$A$，　tan$A$
の値を求めよ。

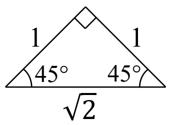


(2)　右の図の直角三角形 ABC において，
sin$A$，　cos$A$，　tan$A$
の値を求めよ。



(3)　右の図の直角三角形を参考に，
次の三角比の値を求めよ。
①　sin45°
②　cos60°
③　tan30°



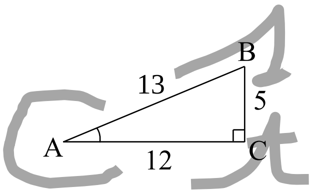


解答

(1)　$\sin A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\frac{5}{13}$,

$\cos A=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{12}{13}$,

$\tan A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\frac{5}{12}$

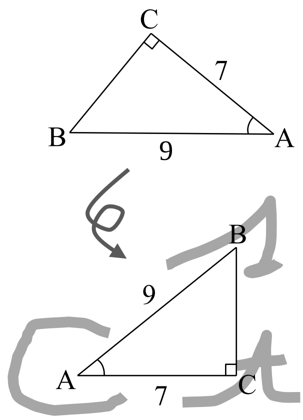


(2)　直角三角形 ABC を右のように向きを変える。
三平方の定理により　BC^2＝9^2－7^2＝32
BC＞0 であるから　BC＝$4\sqrt{2}$

よって　$\sin A=\frac{4\sqrt{2}}{9}$,

$\cos A=\frac{7}{9}$,

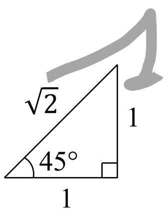
$\tan A=\frac{4\sqrt{2}}{7}$

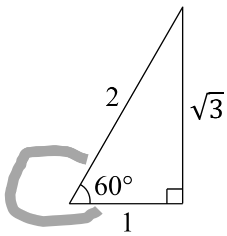


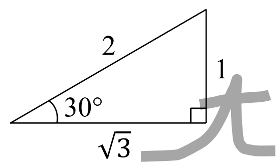
(3)　①　$\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$

②　$\cos 60°=\frac{1}{2}$

③　$\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$



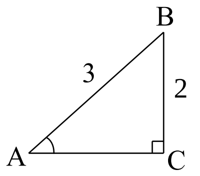




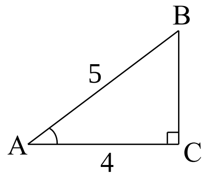
$\boxed{2}$

三角比の表を用いて，次の図の直角三角形 ABC における∠A のおよその大きさ A を求めよ。

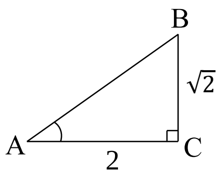
(1)



(2)



(3)



三角比の表

A	sin$A$	cos$A$	tan$A$
～			
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745

A	sin$A$	cos$A$	tan$A$
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000
～			

当該ファイルに関連のある部分を抜粋しています。

解答

(1)　$\sin A = \dfrac{2}{3} \fallingdotseq 0.6667$

三角比の表から，sin41° ＝0.6561，　sin42° ＝0.6691 より，sin42° の値が 0.6667 に最も近いので

***A*≒42°**

(2)　$\cos A = \dfrac{4}{5} = 0.8$

三角比の表から，cos36° ＝0.8090，　cos37° ＝0.7986 より，cos37° の値が 0.8 に最も近いので　***A*≒37°**

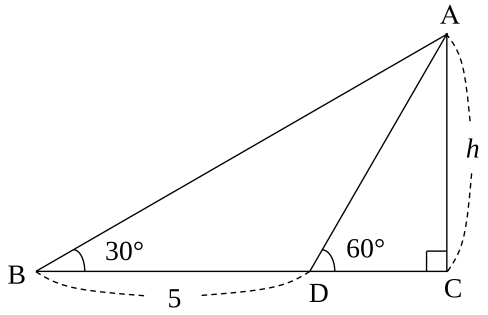
(3)　$\tan A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，　　$\sqrt{2} = 1.4142\cdots\cdots$ であるから　$\dfrac{\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 0.7071$

三角比の表から，tan35° ＝0.7002，　tan36° ＝0.7265 より，tan35° の値が 0.7071 に最も近いので

***A*≒35°**

$\boxed{3}$

右の図の h を求めよ。



解答

△ADC において，DC：AC $= 1 : \sqrt{3}$ から　DC：$h = 1 : \sqrt{3}$　　これから　$\mathrm{DC} = \dfrac{h}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}h$

△ABC において，AC：BC $= 1 : \sqrt{3}$ から　$h : \left(5 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}h\right) = 1 : \sqrt{3}$

これから　$5 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}h = \sqrt{3}h$　　$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}h = 5$ より　$\boldsymbol{h} = \dfrac{15}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\mathbf{5\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$

$\boxed{\text{別解}}$　△ABD が AD＝DB＝5 の二等辺三角形であることを用いて，AD：AC＝2：$\sqrt{3}$から求めることもできる。

$\boxed{4}$
θは鋭角とする。

(1)　$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$のとき，$\sin\theta$と$\tan\theta$の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta=\dfrac{1}{7}$のとき，$\sin\theta$と$\cos\theta$の値を求めよ。

解答

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$から　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$　　これに，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$を代入すると

$\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$　　θは鋭角であるから　$\sin\theta>0$

よって　$\boldsymbol{\sin\theta}=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$　　また　$\boldsymbol{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\div\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times3=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

(2)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$に，$\tan\theta=\dfrac{1}{7}$を代入すると　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\left(\dfrac{1}{7}\right)^2=1+\dfrac{1}{49}=\dfrac{50}{49}$

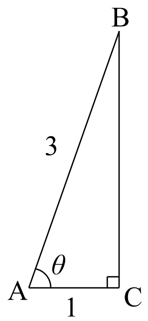
よって　$\cos^2\theta=\dfrac{49}{50}$　　θは鋭角であるから　$\cos\theta>0$　　したがって　$\boldsymbol{\cos\theta}=\sqrt{\dfrac{49}{50}}=\boldsymbol{\dfrac{7}{5\sqrt{2}}}$

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$から　$\boldsymbol{\sin\theta}=\tan\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{7}{5\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5\sqrt{2}}}$

別解　(1)　$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$より

AB＝3，AC＝1，∠C＝90°
の直角三角形 ABC をかく。
三平方の定理により　$BC^2=AB^2-AC^2=3^2-1^2=8$
BC＞0 より　$BC=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

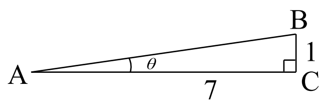
よって　$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，　$\tan\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{1}=2\sqrt{2}$



(2)　$\tan\theta=\dfrac{1}{7}$より

AC＝7，BC＝1，∠C＝90°
の直角三角形 ABC をかく。
三平方の定理により　$AB^2=AC^2+BC^2=7^2+1^2=50$
$AB>0$ より　$AB=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

よって　$\sin\theta=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$，　$\cos\theta=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$



$\boxed{5}$

次の三角比を 45° より小さい角の三角比で表せ。

(1)　$\sin 80^\circ$　　(2)　$\cos 50^\circ$　　(3)　$\tan 64^\circ$

解答

(1)　$80^\circ = 90^\circ - 10^\circ$ であり，$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ であるから

$$\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \mathbf{\cos 10^\circ}$$

(2)　$50^\circ = 90^\circ - 40^\circ$ であり，$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$ であるから

$$\cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ) = \mathbf{\sin 40^\circ}$$

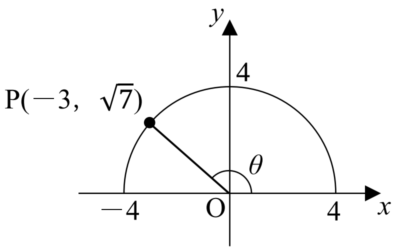
(3)　$64^\circ = 90^\circ - 26^\circ$ であり，$\tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$ であるから

$$\tan 64^\circ = \tan(90^\circ - 26^\circ) = \boldsymbol{\frac{1}{\tan 26^\circ}}$$

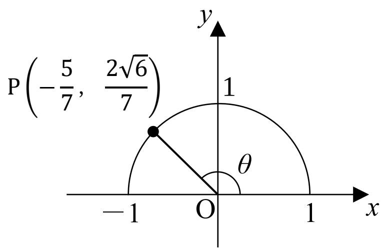
6

(1)　次の図において，sinθ，cosθ，tanθ の値を求めよ。

①



②



(2)　次の三角比の値を求めよ。

①　sin120°　　②　cos135°　　③　tan150°

解答

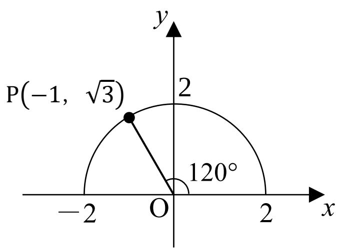
(1)　①　$r=4$ であり，点 P の座標は$(-3,\ \sqrt{7})$であるから

$$\sin\boldsymbol{\theta}=\frac{\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{4}},\qquad \cos\boldsymbol{\theta}=\frac{-3}{4}=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}},\qquad \tan\boldsymbol{\theta}=\frac{\sqrt{7}}{-3}=-\frac{\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{3}}$$

②　$r=1$ であり，点 P の座標は$\left(-\frac{5}{7},\ \frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$であるから

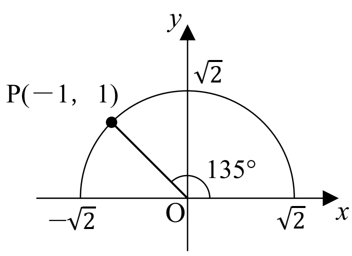
$$\sin\boldsymbol{\theta}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{7}}{1}=\frac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{7}},\qquad \cos\boldsymbol{\theta}=\frac{-\frac{5}{7}}{1}=-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}},\qquad \tan\boldsymbol{\theta}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{7}}{-\frac{5}{7}}=-\frac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{5}}$$

(2)　①　$\theta=120°$ のとき，
右の図のように点 P を
とることができる。



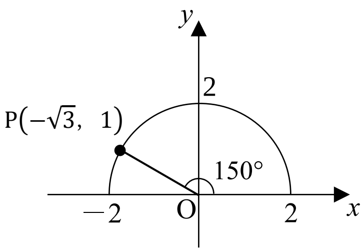
よって　$\sin 120°=\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

②　$\theta=135°$ のとき，
右の図のように点 P を
とることができる。



よって　$\cos 135°=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$

③　$\theta=150°$ のとき，
右の図のように点 P を
とることができる。



よって　$\tan 150°=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$

$\boxed{7}$

次の三角比を 90° より小さい角の三角比で表せ。

(1)　sin160°　　　(2)　cos105°　　　(3)　tan128°

解答

(1)　160° ＝180° －20° であり，sin(180° $-\theta$)＝sinθ であるから

　　sin160° ＝sin(180° －20°)＝**sin20°**

(2)　105° ＝180° －75° であり，cos(180° $-\theta$)＝－cosθ であるから

　　cos105° ＝cos(180° －75°)＝**－cos75°**

(3)　128° ＝180° －52° であり，tan(180° $-\theta$)＝－tanθ であるから

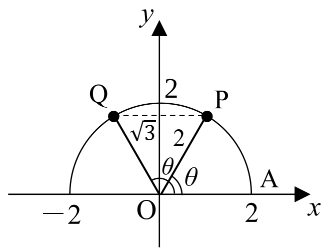
　　tan128° ＝tan(180° －52°)＝**－tan52°**

$\boxed{8}$
0° ≦θ≦180° のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

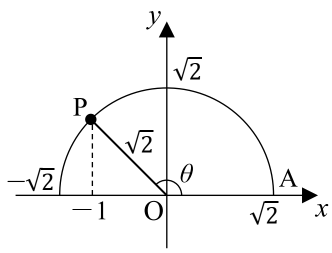
(1)　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\tan\theta=-\sqrt{3}$

解答

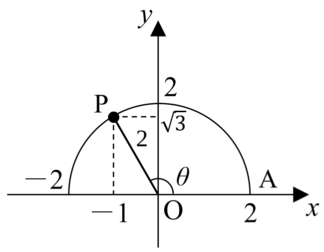
(1)　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，右の図のように
半径 2 の半円上に点 P，Q をとると，
求める θ は∠AOP，∠AOQ である。
よって　$\boldsymbol{\theta=60°}$**，120°**



(2)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，右の図のように
半径$\sqrt{2}$の半円上に点 P をとると，
求める θ は∠AOP である。
よって　$\boldsymbol{\theta=135°}$



(3)　$\tan\theta=-\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}$ であり，
$(-1)^2+(\sqrt{3})^2=2^2$ であるから，
右の図のように半径 2 の半円上に点 P をとると，
求める θ は∠AOP である。
よって　$\boldsymbol{\theta=120°}$



$\boxed{9}$

0° ≦θ≦180° とする。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{15}{17}$のとき，$\cos\theta$と$\tan\theta$の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta = -\dfrac{2}{11}$のとき，$\sin\theta$と$\cos\theta$の値を求めよ。

解答

(1)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$から　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$　　これに，$\sin\theta = \dfrac{15}{17}$を代入すると

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2 = 1 - \frac{225}{289} = \frac{64}{289}$$

(ⅰ)　cosθ＞0 のとき

$$\boldsymbol{\cos\theta} = \sqrt{\frac{64}{289}} = \boldsymbol{\frac{8}{17}}$$

また　$\boldsymbol{\tan\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{15}{17} \div \dfrac{8}{17} = \dfrac{15}{17} \times \dfrac{17}{8} = \boldsymbol{\dfrac{15}{8}}$

(ⅱ)　cosθ＜0 のとき

$$\boldsymbol{\cos\theta} = -\sqrt{\frac{64}{289}} = -\boldsymbol{\frac{8}{17}}$$

また　$\boldsymbol{\tan\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{15}{17} \div \left(-\dfrac{8}{17}\right) = \dfrac{15}{17} \times \left(-\dfrac{17}{8}\right) = -\boldsymbol{\dfrac{15}{8}}$

(2)　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$に，$\tan\theta = -\dfrac{2}{11}$を代入すると　$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \left(-\dfrac{2}{11}\right)^2 = 1 + \dfrac{4}{121} = \dfrac{125}{121}$

よって　$\cos^2\theta = \dfrac{121}{125}$　　$0° \leqq \theta \leqq 180°$，　$\tan\theta = -\dfrac{2}{11} < 0$であるから　$90° < \theta < 180°$

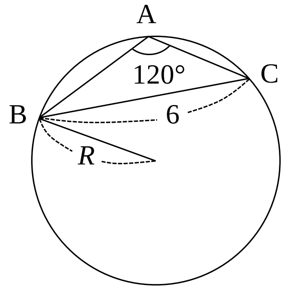
これから　$\cos\theta < 0$　　したがって　$\boldsymbol{\cos\theta} = -\sqrt{\dfrac{121}{125}} = -\boldsymbol{\dfrac{11}{5\sqrt{5}}}$

また，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$から　$\boldsymbol{\sin\theta} = \tan\theta \cdot \cos\theta = \left(-\dfrac{2}{11}\right) \cdot \left(-\dfrac{11}{5\sqrt{5}}\right) = \boldsymbol{\dfrac{2}{5\sqrt{5}}}$

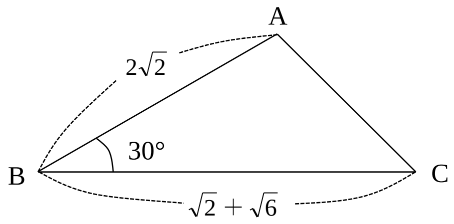
１０

△ABC において，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c，
∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C で表すことにする。

(1)　$A=120°$，$a=6$ のときの外接円の半径 R を求めよ。



(2)　$a=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，$B=30°$，$c=2\sqrt{2}$のときの A，b，C
をそれぞれ求めよ。



解答

(1)　正弦定理により，$\dfrac{6}{\sin 120°}=2R$から　$\dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$

よって　$\boldsymbol{R}=\left(6\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

(2)　余弦定理により

$$b^2=(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 30°=2+2\sqrt{12}+6+8-4\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+\sqrt{6})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$=16+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}-12=4$

$b>0$ から　$b=2$

正弦定理により，$\dfrac{2}{\sin 30°}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin C}$から　$\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin C}$

よって　$\sin C=2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

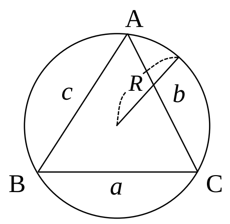
$2\sqrt{2}<\sqrt{2}+\sqrt{6}$より，$C<A$ であるから　$C=45°$，　$A=180°-30°-45°=105°$

したがって　**$(A, b, C)=(105°, 2, 45°)$**

１１

cos$A$sin$C$＝sin$B$ が成り立つとき，△ABC はどのような形の三角形か。

解答



与えられた式に　$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\sin C = \dfrac{c}{2R}$，$\sin B = \dfrac{b}{2R}$

をそれぞれ代入すると

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{c}{2R}=\frac{b}{2R}$$

両辺に $4bR$ を掛けると　$b^2+c^2-a^2=2b^2$　　これから　$a^2+b^2=c^2$

よって，△ABC は **∠C＝90° の直角三角形** である。

$\boxed{１２}$

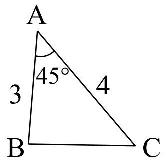
次の△ABC の面積を求めよ。

(1)　AB＝3，AC＝4，A＝45°

(2)　AB＝3，AC＝5，BC＝7

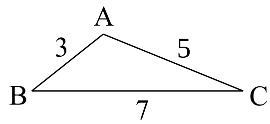
解答

(1)　$S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{3\sqrt{2}}$



(2)　余弦定理により　$\cos A=\frac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 3}=\frac{25+9-49}{30}=-\frac{1}{2}$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$，　$0^\circ<A<180^\circ$ のとき，$\sin A>0$ から



$$\sin A=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{\frac{15\sqrt{3}}{4}}$

$\boxed{別解}$　ヘロンの公式を用いる。

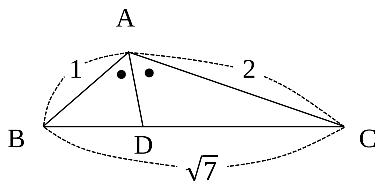
$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{7+5+3}{2}=\frac{15}{2}$ であるから

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-7\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-3\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{9}{2}}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

１３　次の空欄を埋めよ。

△ABC において，$a=\sqrt{7}$，$b=2$，$c=1$ のとき，cos$A$＝(ア)，
すなわち ∠A＝(イ)　　よって，△ABC の面積は(ウ)
である。さらに，∠A の二等分線と BC の交点を D としたとき，
AD の長さは(エ)である。



解答

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4+1-7}{2\cdot 2\cdot 1}=-\mathbf{\frac{1}{2}}$$

$0°\leqq$ ∠A $\leqq 180°$ であるから　∠A＝$\mathbf{120°}$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot\sin 120°=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

△ABD＋△ACD＝△ABC であるので，面積の公式から

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot 1\cdot\sin 60°+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot 2\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

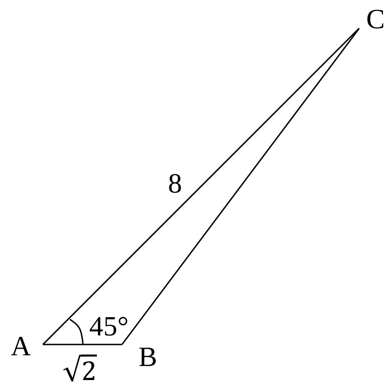
これから　$\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{AD}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$\frac{3\sqrt{3}}{4}\mathrm{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　よって　$\mathrm{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{3\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{2}{3}}$

(ア)　$-\mathbf{\frac{1}{2}}$,　　(イ)　$\mathbf{120°}$,　　(ウ)　$\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$,　　(エ)　$\mathbf{\frac{2}{3}}$

$\boxed{１４}$

△ABC において，$A=45°$，$b=8$，$c=\sqrt{2}$のとき，内接円の半径 r を求めよ。

解答



△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 45°$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=4$$

また　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=8^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 8\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 45°$

$$=64+2-2\cdot 8\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=50$$

$a>0$ から　$a=5\sqrt{2}$　　$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ にそれぞれの

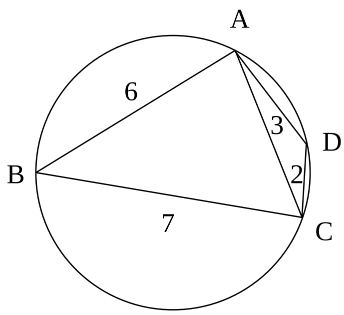
値を代入すると　　$4=\frac{1}{2}r(5\sqrt{2}+8+\sqrt{2})$

$$4=\left(4+3\sqrt{2}\right)r \text{ から}\quad \boldsymbol{r}=\frac{4}{4+3\sqrt{2}}=\frac{4(4-3\sqrt{2})}{(4+3\sqrt{2})(4-3\sqrt{2})}=\boldsymbol{6\sqrt{2}-8}$$

研究 1

円に内接する四角形 ABCD において，AB＝6，BC＝7，CD＝2，DA＝3 のとき，対角線 AC の長さ，四角形 ABCD の面積 S をそれぞれ求めよ。

解答



△ABC において，余弦定理により

$$AC^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos\angle ABC$$
$$= 85 - 84\cos\angle ABC \quad \cdots\cdots①$$

△ADC において，余弦定理により

$$AC^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\angle ADC$$
$$= 13 - 12\cos(180^\circ - \angle ABC)$$
$$= 13 + 12\cos\angle ABC \quad \cdots\cdots②$$

①，②から　$85 - 84\cos\angle ABC = 13 + 12\cos\angle ABC$

これを解いて　$\cos\angle ABC = \dfrac{3}{4}$　　①に代入すると　$AC^2 = 85 - 84 \cdot \dfrac{3}{4} = 22$

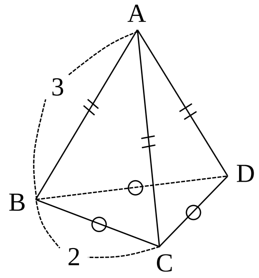
AC＞0 から　$\mathbf{AC = \sqrt{22}}$

また　$\sin\angle ABC = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$　　$\sin\angle ADC = \sin(180^\circ - \angle ABC) = \sin\angle ABC$ より

$$\boldsymbol{S} = \triangle ABC + \triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \boldsymbol{6\sqrt{7}}$$

研究２

右の図のような，正三角錐 ABCD の体積を求めよ。



解答

頂点 A から底面△BCD に垂線 AH を引くと　△ABH≡△ACH≡△ADH

これから，BH＝CH＝DH であるので，点 H は△BCD の外心である。

よって，BH は△BCD の外接円の半径であるから

$$\frac{2}{\sin 60°} = 2\mathrm{BH} \qquad \text{これから} \quad \mathrm{BH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

△ABH は直角三角形であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{AH} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BH}^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{69}}{3}$$

また　$\triangle \mathrm{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60° = \sqrt{3}$

以上から，正三角錐の体積は　$\frac{1}{3} \cdot \triangle \mathrm{BCD} \cdot \mathrm{AH} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{69}}{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{23}}{3}}$

∠AHB＝∠AHC＝∠AHD
＝90°，
AB＝AC＝AD,
AH は共通