図形と方程式

1

(1)　数直線上の 2 点 A(－10)，B(－1)を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

①　2 : 1 に内分する点　　②　中点　　③　2 : 1 に外分する点

(2)　座標平面上の 2 点 A(0，－6)，B(7，0)を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

①　中点　　②　3 : 4 に内分する点　　③　3 : 4 に外分する点

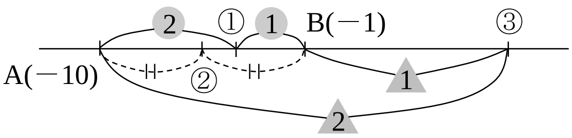
(3)　座標平面上の 3 点 A(－1，3)，B(5，0)，C(a，b)を頂点とする△ABC の重心が(3，4)のとき，a，b をそれぞれ求めよ。

解答

(1)　①　$\dfrac{1\cdot(-10)+2\cdot(-1)}{2+1}=\mathbf{-4}$

②　$\dfrac{-10+(-1)}{2}=-\dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{2}}$

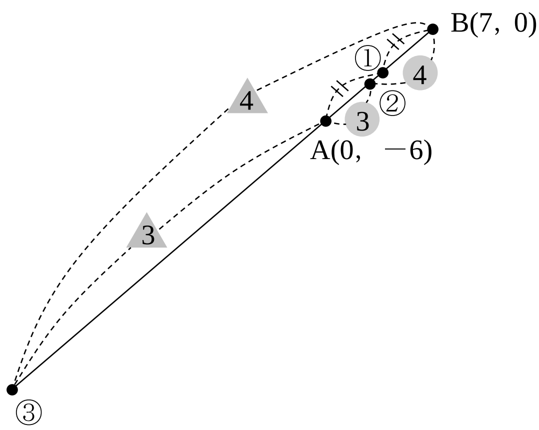
③　$\dfrac{(-1)\cdot(-10)+2\cdot(-1)}{2-1}=\mathbf{8}$



(2)　①　$\left(\dfrac{0+7}{2},\ \dfrac{-6+0}{2}\right)$から　$\left(\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{-3}\right)$

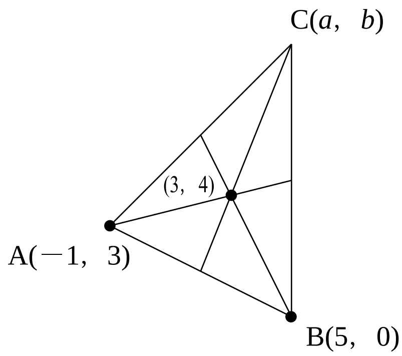
②　$\left(\dfrac{4\cdot0+3\cdot7}{3+4},\ \dfrac{4\cdot(-6)+3\cdot0}{3+4}\right)$から　$\left(\mathbf{3},\ -\dfrac{\mathbf{24}}{\mathbf{7}}\right)$

③　$\left(\dfrac{4\cdot0+(-3)\cdot7}{-3+4},\ \dfrac{4\cdot(-6)+3\cdot0}{-3+4}\right)$から　$\mathbf{(-21,\ -24)}$



(3)　$\left(\dfrac{-1+5+a}{3},\ \dfrac{3+0+b}{3}\right)=(3,\ 4)$から　$\begin{cases}\dfrac{4+a}{3}=3\\[2mm]\dfrac{3+b}{3}=4\end{cases}$

これを解いて　$\boldsymbol{a=5,\ b=9}$



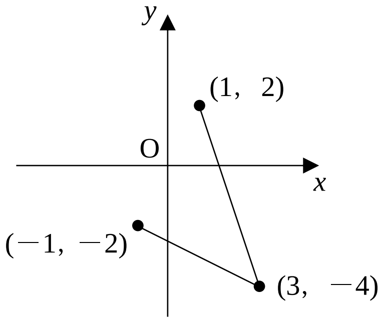
$\boxed{2}$　次の座標平面上の 2 点間の距離を求めよ。

(1)　(1，2)，(3，－4)　　　(2)　(－1，－2)，(3，－4)

解答

(1)　$\sqrt{(3-1)^2+(-4-2)^2}=\mathbf{2\sqrt{10}}$

(2)　$\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{-4-(-2)\}^2}=\mathbf{2\sqrt{5}}$

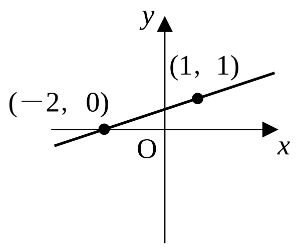


$\boxed{3}$　次の直線の方程式を求めよ。

(1)　2 点(－2，0)，(1，1)を通る直線　　　(2)　点(－2，0)を通り，直線 $5x-y=0$ に垂直な直線

解答

(1)　$y-0=\dfrac{1-0}{1-(-2)}\{x-(-2)\}$から　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}}$

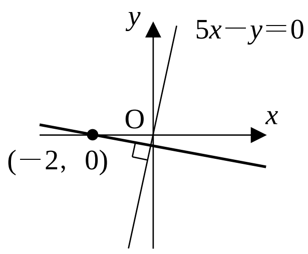


(2)　直線 $5x-y=0$ の傾きは $y=5x$ より 5 であるから，

求める直線の傾き m は

$5\cdot m=-1$ から　$m=-\dfrac{1}{5}$

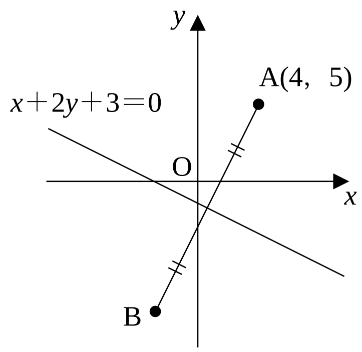
したがって　$y-0=-\dfrac{1}{5}\{x-(-2)\}$から　$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{5}x-\dfrac{2}{5}}$



$\boxed{4}$
直線 l：$x+2y+3=0$ に関して，点 A(4，5)と対称な点 B の座標を求めよ。

解答

点 B の座標を$(p,\ q)$とする。



(i)　直線 l の傾きは，$y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$ より　$-\dfrac{1}{2}$

直線 AB の傾きは $\dfrac{q-5}{p-4}$ であり，直線 AB は

直線 l に垂直であるから　$\dfrac{q-5}{p-4}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

すなわち　$q=2p-3$　……①

(ii)　線分 AB の中点は $\left(\dfrac{4+p}{2},\ \dfrac{5+q}{2}\right)$

これが直線 l 上にあるから　$\dfrac{4+p}{2}+2\cdot\dfrac{5+q}{2}+3=0$

すなわち　$p+2q=-20$　……②

①，②を連立させて解くと　$p=-\dfrac{14}{5}$，$q=-\dfrac{43}{5}$

したがって，点 B の座標は　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{14}{5},\ -\dfrac{43}{5}\right)}$

$\boxed{5}$

(1)　次の点と直線の距離を求めよ。

①　(2，0)，$x-2y=0$　　　　　　②　(2，1)，$x-2y+1=0$

(2)　座標平面上の 3 点 A(−5，1)，B(−2，−4)，C(1，−1)を頂点とする△ABC の面積を求めよ。

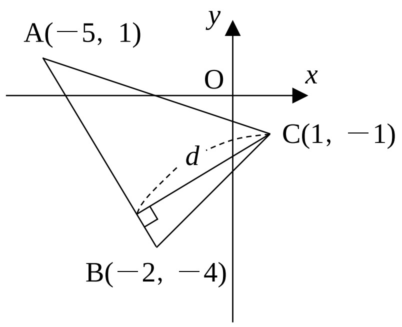
解答

(1)　①　求める距離を d とすると　　$d=\dfrac{|2-2\cdot 0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\mathbf{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$

②　求める距離を d とすると　　$d=\dfrac{|2-2\cdot 1+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$

(2)　直線 AB の方程式は　$y-1=\dfrac{-4-1}{-2-(-5)}\{x-(-5)\}$から

$$y=-\frac{5}{3}x-\frac{22}{3}$$



また，線分 AB の長さは

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\{-2-(-5)\}^2+(-4-1)^2}=\sqrt{34}$$

$y=-\dfrac{5}{3}x-\dfrac{22}{3}$ を変形すると　$5x+3y+22=0$

よって，直線 $5x+3y+22=0$ と点 C(1，−1)の距離 d は

$$d=\frac{|5\cdot 1+3\cdot(-1)+22|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\frac{24}{\sqrt{34}}$$

以上から　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{34}\cdot\dfrac{24}{\sqrt{34}}=\mathbf{12}$

$\boxed{6}$

(1)　$x^2+y^2+5x+3y+4=0$ はどんな図形を表すか。

(2)　2 点(3，6)，(−3，−2)を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(3)　x 軸，y 軸に接し，点(1，2)を通る円の方程式を求めよ。

(4)　3 点(1，−3)，(−4，2)，(5，−1)を通る円の方程式を求めよ。

解答

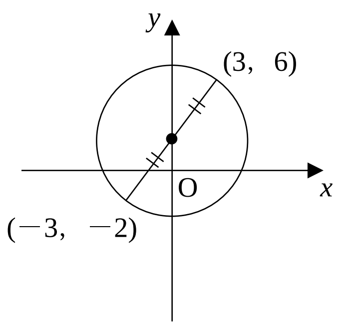
(1)　$x^2+y^2+5x+3y+4=0$ を変形すると，$x^2+5x+\frac{25}{4}+y^2+3y+\frac{9}{4}-\frac{25}{4}-\frac{9}{4}+4=0$ から

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$$

よって，**中心$\left(-\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$，半径$\frac{3\sqrt{2}}{2}$の円**

(2)　直径の中点が円の中心であるから

$$\left(\frac{3+(-3)}{2},\ \frac{6+(-2)}{2}\right)$$　すなわち　(0，2)



また，円の半径を r とすると，r^2 は

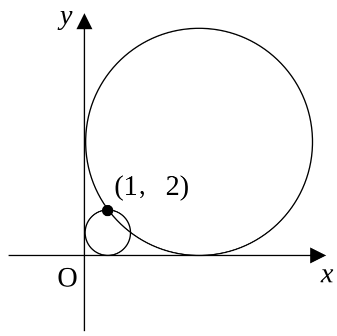
2 点(3，6)，(0，2)の距離の 2 乗であるから

$$r^2=(0-3)^2+(2-6)^2=25$$

よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+(y-2)^2=25}$$

(3)　点(1，2)は第 1 象限の点であるから，x 軸にも y 軸にも接する円の中心は，$a>0$ として，$(a,\ a)$とおける。



半径は a であるから，求める円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$$

と表すことができる。

点(1，2)を通ることから，$(1-a)^2+(2-a)^2=a^2$ より

$$a^2-6a+5=0 \qquad (a-1)(a-5)=0$$

よって　$a=1,\ 5$　　　したがって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ (x-5)^2+(y-5)^2=25}$$

(4)　求める円の方程式を，$x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。この円は 3 点(1，−3)，(−4，2)，(5，−1)を通るから

$$\begin{cases}1+9+l-3m+n=0\\16+4-4l+2m+n=0\\25+1+5l-m+n=0\end{cases}$$

これらを整理すると

$$\begin{cases}l-3m+n=-10 & \cdots\cdots①\\-4l+2m+n=-20 & \cdots\cdots②\\5l-m+n=-26 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①−②から　$5l-5m=10$　……④，　　①−③から　$-4l-2m=16$　……⑤

④，⑤を連立させて解くと　$m=-4,\ l=-2$　　①から　$n=-10-(-2)+3\cdot(-4)=-20$

以上から，求める円の方程式は　$\boldsymbol{x^2+y^2-2x-4y-20=0}$

$\boxed{7}$

(1)　円 $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ と直線 $x-2y+2=0$ の共有点があるかどうか調べ，あればその座標を求めよ。

(2)　a を実数とする。円 $x^2+y^2=3$ と直線 $y=a(x-3)$が接するときの a の値と，その接点の座標をすべて求めよ。

解答

(1)　$x^2+y^2-4x-6y+9=0$　……①，　　　$x-2y+2=0$　……②

とする。②を変形すると　$x=2y-2$　　これを①に代入すると

$(2y-2)^2+y^2-4(2y-2)-6y+9=0$　　　$4y^2-8y+4+y^2-8y+8-6y+9=0$

$5y^2-22y+21=0$　　　$(y-3)(5y-7)=0$　　　$y=3,\ \dfrac{7}{5}$

②から，$y=3$ のとき $x=4$，　　　$y=\dfrac{7}{5}$ のとき $x=\dfrac{4}{5}$

よって，求める**共有点は 2 個あり，その座標は　$\boldsymbol{(4,\ 3),\ \left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)}$**

(2)　$x^2+y^2=3$ に $y=a(x-3)$を代入すると　$x^2+\{a(x-3)\}^2=3$　　　$(1+a^2)x^2-6a^2x+9a^2-3=0$　……①

①の 2 次方程式が重解をもつとき，円と直線は接する。①の判別式を D とすると

$D=(-6a^2)^2-4\cdot(1+a^2)\cdot(9a^2-3)=-24a^2+12$

$D=0$ となるのは，$-24a^2+12=0$ のときであるから，求める a の値は　$a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

これを①に代入すると　$\dfrac{3}{2}x^2-3x+\dfrac{3}{2}=0$　　これを解いて　$x=1$

ここで，$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき直線の方程式から　$y=-\sqrt{2}$，　　　$a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき　$y=\sqrt{2}$

よって，求める接点の座標は　**$\boldsymbol{a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ のとき　$\boldsymbol{(1,\ -\sqrt{2})}$，　　$\boldsymbol{a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ のとき　$\boldsymbol{(1,\ \sqrt{2})}$**

補足　本問では座標まで求めなくてはいけないため，点と直線の距離の公式を用いる解法は適さない。

$\boxed{8}$

(1)　①　円 $x^2+y^2=4$ 上の点$(\sqrt{3},\ 1)$における接線の方程式を求めよ。

　②　円 $x^2+y^2+2x+4y=0$ 上の点$(0,\ 0)$における接線の方程式を求めよ。

(2)　点$(1,\ 3)$を通り，円 $x^2+y^2=2$ に接する直線の方程式を求めよ。

解答

(1)　①　$\boldsymbol{\sqrt{3}x+y=4}$

　②　$x^2+y^2+2x+4y=0$ を変形すると　$(x+1)^2+(y+2)^2=5$

　　よって，$(x+1)^2+(y+2)^2=5$ 上の点$(0,\ 0)$における接線の方程式は

　　$(0+1)(x+1)+(0+2)(y+2)=5$　　すなわち　$\boldsymbol{x+2y=0}$

(2)　まず，求める直線と円の接点を$(a,\ b)$とおく。

よって，接線の方程式は　$ax+by=2$

これが，$(1,\ 3)$を通るから　$a+3b=2$　……①

また，$(a,\ b)$は円上の点であるから　$a^2+b^2=2$　……②

①を変形すると　$a=-3b+2$

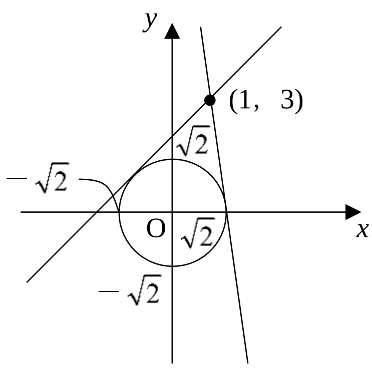
これを②に代入すると　$(-3b+2)^2+b^2=2$

整理すると，$(b-1)(5b-1)=0$ から　$b=1,\ \dfrac{1}{5}$

①から，$b=1$ のとき $a=-1$，$b=\dfrac{1}{5}$ のとき $a=\dfrac{7}{5}$

求める接線の方程式は　$-x+y=2$，$\dfrac{7}{5}x+\dfrac{1}{5}y=2$ から

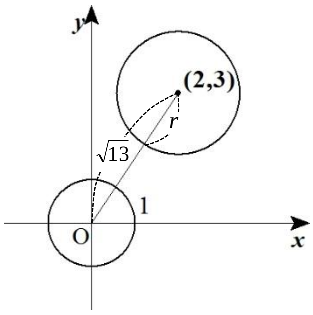
　　$\boldsymbol{-x+y=2,\ 7x+y=10}$



$\boxed{9}$

2 つの円 $x^2+y^2=1$，$(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$ が共有点をもたないように，定数 r の値の範囲を定めよ。ただし，$r>0$ とする。

解答



円 $x^2+y^2=1$ は，中心(0，0)，半径 1

円$(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$ は，中心(2，3)，半径 r

2 つの円の中心間の距離を d とすると　$d=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

(i)　互いに外部にあるとき　　　$\sqrt{13}>1+r$ から　$r<\sqrt{13}-1$

(ii)　一方が他方を含むとき　　　$\sqrt{13}<r-1$ から　$r>\sqrt{13}+1$

(i)，(ii)から，2 つの円が共有点をもたない r の値の範囲は

$0<r<\sqrt{13}-1$，$\sqrt{13}+1<r$

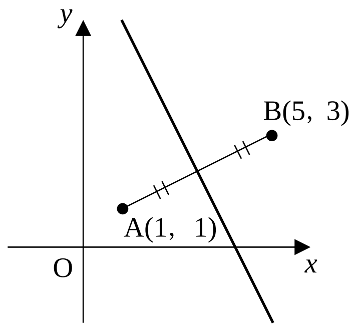
$\boxed{10}$

点 A(1，1)，B(5，3)であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　2 点 A，B から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。

(2)　2 点 A，B からの距離の比が 3：1 である点 Q の軌跡を求めよ。

解答



(1)　条件を満たす点を P(x，y)とすると

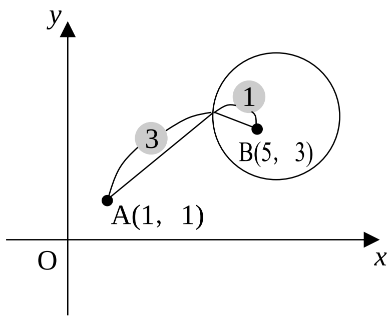
AP＝BP から　$AP^2=BP^2$

よって　$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-5)^2+(y-3)^2$

整理すると，$8x+4y-32=0$ から　$y=-2x+8$

以上から，求める点 P の軌跡は，**直線 $y=-2x+8$** である。

補足　直線 $y=-2x+8$ は線分 AB の垂直二等分線である。



(2)　条件を満たす点を Q(x，y)とすると

AQ：BQ＝3：1 から　AQ＝3BQ

よって　$AQ^2=9BQ^2$

したがって　$(x-1)^2+(y-1)^2=9\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$

整理すると，$8x^2-88x+8y^2-52y+304=0$ から

$$\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y-\frac{13}{4}\right)^2=\frac{45}{16}$$

以上から，求める点 P の軌跡は，

点$\left(\frac{11}{2},\ \frac{13}{4}\right)$を中心とし，半径が $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ の円である。

１１

実数 a の値が変化するとき，放物線 $y=x^2-2(a+1)x+2a$ の頂点の軌跡を求めよ。

解答

$y=x^2-2(a+1)x+2a$ を変形すると　$y=\{x-(a+1)\}^2-a^2-1$

頂点の座標を$(x,\ y)$とすると

$x=a+1,\ y=-a^2-1$

この 2 式から a を消去すると，$a=x-1$ より　$y=-(x-1)^2-1=-x^2+2x-2$

よって，求める軌跡は　**放物線 $y=-x^2+2x-2$**　である。

１２　次の不等式の表す領域を図示せよ。

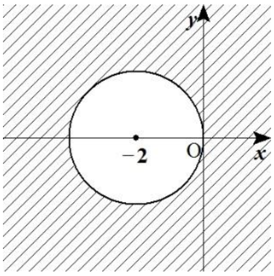
(1)　$(x+2)^2+y^2 \geqq 4$　　(2)　$(x-y+6)(y-x^2)<0$

解答

(1)　求める領域は円$(x+2)^2+y^2=4$ の周およびその外部

である。すなわち，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



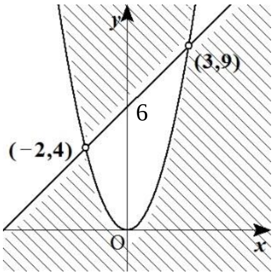
(2)　不等式$(x-y+6)(y-x^2)<0$ の表す領域は，

$\begin{cases} x-y+6>0 \\ y-x^2<0 \end{cases}$　の表す領域と

$\begin{cases} x-y+6<0 \\ y-x^2>0 \end{cases}$

の表す領域を合わせたもので，右の図の斜線部分

である。ただし，境界線を含まない。



１３

x，y が 4 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$7x+3y-21 \leqq 0$，$2x+3y-12 \leqq 0$ を満たすとき，$3x+2y$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ。

解答

(1)　与えられた連立不等式の表す領域を D とする。

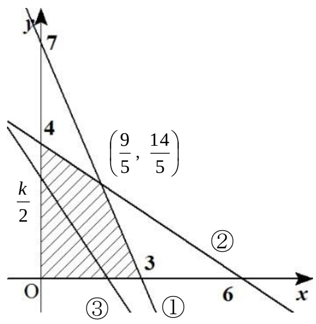
$$\begin{cases} 7x+3y-21=0 & \cdots\cdots① \\ 2x+3y-12=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$ をそれぞれ変形すると $$\begin{cases} y=-\dfrac{7}{3}x+7 \\ y=-\dfrac{2}{3}x+4 \end{cases}$$

であり，①と②の交点は $\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{14}{5}\right)$

であるから，D は右の図の斜線部分である。

ここで，$3x+2y=k$　……③とおくと，

$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{k}{2}$ と変形できるから，③は



傾きが $-\dfrac{3}{2}$，y 切片が $\dfrac{k}{2}$ の直線を表す。

この直線③が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

図から，k は③が $\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{14}{5}\right)$ を通るとき最大となり，$(0,\ 0)$を通るとき最小となる。

よって，$3x+2y$ は　$\boldsymbol{x=\dfrac{9}{5}}$**，**$\boldsymbol{y=\dfrac{14}{5}}$ **のとき最大値** $3\cdot\dfrac{9}{5}+2\cdot\dfrac{14}{5}=\mathbf{11}$，

$\boldsymbol{x=0}$**，**$\boldsymbol{y=0}$ **のとき最小値** $0+0=\mathbf{0}$ をとる。