漸化式

ここで扱う数は，すべて実数とする。

$\boxed{1}$

次の条件によって定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

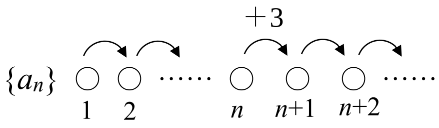
(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3$　　(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=-2a_n$　　(3)　$a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n+2n-3$

解答

(1)　初項が 1，公差が 3

の等差数列であるから

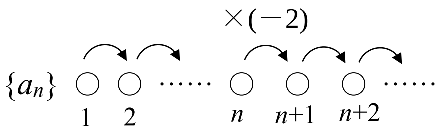
$$\boldsymbol{a_n}=1+(n-1)\cdot 3=\boldsymbol{3n-2}$$



(2)　初項が 2，公比が-2

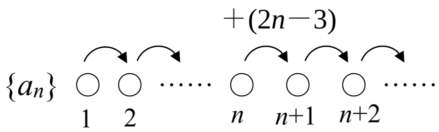
の等比数列であるから

$$\boldsymbol{a_n}=2\cdot(-2)^{n-1}=\boldsymbol{-(-2)^n}$$



(3)　数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$

とすると　　$b_n=2n-3$



よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-3)=-1+2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)-3(n-1)$$

$$=-1+n^2-n-3n+3=n^2-4n+2$$

また，$n=1$ のとき　$a_1=1^2-4\cdot 1+2=-1$　　よって，$a_n=n^2-4n+2$ は $n=1$ のときも成り立つ。

以上から　$\boldsymbol{a_n=n^2-4n+2}$

$\boxed{2}$

$a_1=0$，$a_{n+1}=2a_n+1$ ($n=1$，2，3，……) で定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

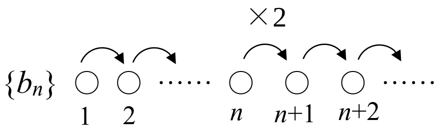
解答その１

与えられた漸化式 $a_{n+1}=2a_n+1$ と，n を 1 つ増やした $a_{n+2}=2a_{n+1}+1$ の辺々を引くと

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$$

ここで，$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおけば，$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$ より

$$b_{n+1}=2b_n$$



また，$b_1=a_2-a_1=(2\cdot a_1+1)-a_1=(2\cdot 0+1)-0=1$ より

$$b_n=2^{n-1}$$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ から，数列$\{a_n\}$の階差数列が$\{b_n\}$であるので，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=0+\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^{n-1}-1$$

また，$n=1$ のとき　$a_1=2^{1-1}-1=0$　　よって，$a_n=2^{n-1}-1$ は$n=1$ のときも成り立つ。

以上から　$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}-1}$

解答その２

特性方程式$\alpha=2\alpha+1$ から　$\alpha=-1$　　よって，$a_{n+1}=2a_n+1$ は$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

と変形できる。$a_n+1=b_n$とおくと，$a_{n+1}+1=b_{n+1}$であるから　$b_{n+1}=2b_n$

ここで，$b_1=a_1+1=0+1=1$ より　　$b_n=2^{n-1}$

したがって　$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}-1}$

$\boxed{3}$

$a_1=1$，$a_{n+1}=-2a_n+3n$ ($n=1$，2，3，……) で定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

解答

与えられた漸化式 $a_{n+1}=-2a_n+3n$ と，n を 1 つ増やした $a_{n+2}=-2a_{n+1}+3(n+1)$の辺々を引くと

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n)+3$$

ここで，$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおけば，$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$ より　$b_{n+1}=-2b_n+3$

特性方程式 $\alpha=-2\alpha+3$ から　$\alpha=1$　　よって，$b_{n+1}=-2b_n+3$ は $b_{n+1}-1=-2(b_n-1)$と変形できる。

$b_n-1=c_n$ とおくと，$b_{n+1}-1=c_{n+1}$ であるから　$c_{n+1}=-2c_n$

ここで，$c_1=b_1-1=(a_2-a_1)-1=\{(-2a_1+3\cdot1)-a_1\}-1=\{(-2+3)-1\}-1=-1$ より

$$c_n=-(-2)^{n-1}\qquad \text{これから}\quad b_n=-(-2)^{n-1}+1$$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ から，数列$\{a_n\}$の階差数列が$\{b_n\}$であるので，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\{-(-2)^{k-1}+1\}=1+\frac{-\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)}+(n-1)=1-\frac{1-(-2)^{n-1}}{3}+n-1$$

$$=\frac{(-2)^{n-1}}{3}+n-\frac{1}{3}$$

また，$n=1$ のとき　$a_1=\dfrac{(-2)^{1-1}}{3}+1-\dfrac{1}{3}=1$

よって　$a_n=\dfrac{(-2)^{n-1}}{3}+n-\dfrac{1}{3}$は$n=1$ のときも成り立つ。

以上から　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{(-2)^{n-1}}{3}+n-\dfrac{1}{3}}$

$\boxed{4}$

$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n-2^n$ ($n=1$，2，3，……) で定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

解答

与えられた漸化式$a_{n+1}=3a_n-2^n$の両辺を2^{n+1}で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{a_n}{2^n}-\dfrac{1}{2}$

ここで，$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$とおけば，$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}$より　$b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n-\dfrac{1}{2}$

特性方程式$\alpha=\dfrac{3}{2}\alpha-\dfrac{1}{2}$から　$\alpha=1$　　よって，$b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n-\dfrac{1}{2}$は$b_{n+1}-1=\dfrac{3}{2}(b_n-1)$と変形できる。

$b_n-1=c_n$とおくと，$b_{n+1}-1=c_{n+1}$であるから　$c_{n+1}=\dfrac{3}{2}c_n$

ここで，$c_1=b_1-1=\dfrac{a_1}{2^1}-1=\dfrac{5}{2}-1=\dfrac{3}{2}$より　　$c_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$　　これから　$b_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1$

$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$から　$a_n=2^n\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1\right\}$　　したがって　$\boldsymbol{a_n=3^n+2^n}$

$\boxed{\text{別解}}$　与えられた漸化式$a_{n+1}=3a_n-2^n$の両辺を3^{n+1}で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{a_n}{3^n}-\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

ここで，$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$とおけば，$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}$より　$b_{n+1}=b_n-\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$b_1=\dfrac{a_1}{3^1}=\dfrac{5}{3}$であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k\right\}=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^n=1+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

また，$n=1$ のとき　$b_1=1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^1=\dfrac{5}{3}$

よって，$b_n=1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ は$n=1$ のときも成り立つ。

$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$から　$a_n=3^n\left\{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$　　したがって　$a_n=3^n+2^n$

$\boxed{5}$

次の条件によって定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_2=4$，$a_{n+2}+6a_{n+1}+8a_n=0$

(2)　$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$

解答

(1)　特性方程式 $x^2+6x+8=0$ から　$(x+2)(x+4)=0$ より　$x=-2,\ -4$

$\alpha=-2$，$\beta=-4$ のとき，$a_{n+2}+6a_{n+1}+8a_n=0$ は $a_{n+2}+2a_{n+1}=-4(a_{n+1}+2a_n)$と変形できる。

$a_{n+1}+2a_n=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=-4b_n$ となり　$b_1=a_2+2a_1=4+2\cdot2=8$ から　$b_n=8\cdot(-4)^{n-1}$

よって　$a_{n+1}+2a_n=8\cdot(-4)^{n-1}$　……①

また，$\alpha=-4$，$\beta=-2$ とすると，$a_{n+2}+6a_{n+1}+8a_n=0$ は $a_{n+2}+4a_{n+1}=-2(a_{n+1}+4a_n)$と変形できる。

$a_{n+1}+4a_n=c_n$ とおくと　$c_{n+1}=-2c_n$ となり　$c_1=a_2+4a_1=4+4\cdot2=12$ から　$c_n=12\cdot(-2)^{n-1}$

よって　$a_{n+1}+4a_n=12\cdot(-2)^{n-1}$　……②

②－①から　$2a_n=12\cdot(-2)^{n-1}-8\cdot(-4)^{n-1}$

したがって　$a_n=6\cdot(-2)^{n-1}-4\cdot(-4)^{n-1}$

すなわち　$\boldsymbol{a_n=-3\cdot(-2)^n+(-4)^n}$

(2)　特性方程式 $x^2-8x+16=0$ から　$(x-4)^2=0$ より　$x=4$

$\alpha=\beta=4$ と考えて，$a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$ は $a_{n+2}-4a_{n+1}=4(a_{n+1}-4a_n)$と変形できる。

$a_{n+1}-4a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=4b_n$ となり　$b_1=a_2-4a_1=3-4\cdot1=-1$ から　$b_n=-4^{n-1}$

よって　$a_{n+1}-4a_n=-4^{n-1}$

両辺を4^{n+1}で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{4^{n+1}}-\dfrac{a_n}{4^n}=-\dfrac{1}{16}$

$c_n=\dfrac{a_n}{4^n}$ とおくと　$c_{n+1}=c_n-\dfrac{1}{16}$ であるから，数列$\{c_n\}$は,

初項が$c_1=\dfrac{a_1}{4^1}=\dfrac{1}{4}$，公差が $-\dfrac{1}{16}$ の等差数列である。

よって　$c_n=\dfrac{1}{4}+(n-1)\cdot\left(-\dfrac{1}{16}\right)=-\dfrac{1}{16}n+\dfrac{5}{16}$

$\dfrac{a_n}{4^n}=-\dfrac{1}{16}n+\dfrac{5}{16}$ から　$a_n=4^n\left(-\dfrac{1}{16}n+\dfrac{5}{16}\right)$　　したがって　$\boldsymbol{a_n=(5-n)\cdot4^{n-2}}$