集合と論理

$\boxed{1}$

(1)　集合 $A=\{n^2 \mid 0\leqq n\leqq 4,\ n$ は整数$\}$ を，要素を書き並べて表せ。また，次の①～⑤から誤っているものをすべて選べ。

①　$0\in A$　　②　$1\notin A$　　③　$2\in A$　　④　$9\in A$　　⑤　$25\notin A$

(2)　集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$，$B=\{2n \mid 1\leqq n\leqq 3,\ n$ は整数$\}$，$C=\{2,\ 4,\ 6\}$，空集合 ϕ とする。次の①～⑤から正しいものをすべて選べ。

①　$B\subset A$　　②　$A\subset C$　　③　$B=C$　　④　$\phi\subset B$

(3)　$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ を全体集合とする。U の部分集合 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$，$B=\{2,\ 3,\ 5\}$ について，次の集合を求めよ。

①　$\overline{A\cup B}$　　②　$\overline{A\cap B}$　　③　$\overline{A}\cap B$　　④　$A\cup\overline{B}$

解答

(1)　集合 A を，要素を書き並べて表すと　$\boldsymbol{A=\{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16\}}$

また，①　$0\in A$　は正しい。　②　$1\notin A$　は誤り。　③　$2\in A$　は誤り。

④　$9\in A$　は正しい。　⑤　$25\notin A$　は正しい。

したがって，誤っているものは　**②，③**

(2)　集合 B を，要素を書き並べて表すと　$B=\{2,\ 4,\ 6\}$

①　B の要素はすべて A にも属しているので B は A に含まれる，よって，$B\subset A$ は正しい。

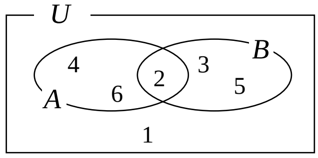
②　A の要素の中で，1，3，12 は C に属していないので A は C に含まれない。よって，$A\subset C$ は誤り。

③　B と C の要素は一致している。よって，$B=C$ は正しい。

④　空集合 ϕ は，すべての集合の部分集合である。よって，$\phi\subset B$ は正しい。

以上から，正しいものは　**①，③，④**

(3)　U，A，B は右の図のように表すことができる。



よって　①　$A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$であるから

$\boldsymbol{\overline{A\cup B}=\{1\}}$

②　$A\cap B=\{2\}$であるから

$\boldsymbol{\overline{A\cap B}=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}}$

③　$\overline{A}=\{1,\ 3,\ 5\}$であるから　$\boldsymbol{\overline{A}\cap B=\{3,\ 5\}}$

④　$\overline{B}=\{1,\ 4,\ 6\}$であるから　$\boldsymbol{A\cup\overline{B}=\{1,\ 2,\ 4,\ 6\}}$

$\boxed{2}$

次の命題の真偽を調べよ。

(1)　実数 a について，$a \geqq 1$ ならば $a>0$

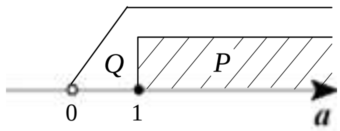
(2)　自然数 m，n について，mn が偶数ならば m，n はともに偶数

解答

(1)　集合 P，Q をそれぞれ

$$P=\{a \mid a \geqq 1,\ a \text{ は実数}\}$$

$$Q=\{a \mid a>0,\ a \text{ は実数}\}$$



とする。右の図から，P は Q に含まれるから　**真**

(2)　$m=1$，$n=2$ のとき，$mn=2$（偶数）であるが m は奇数である。よって　**偽**

$\boxed{3}$

x，y は実数とする。次の $\boxed{\quad\quad}$ に当てはまるものを，下の①～④から選べ。

(1)　四角形が長方形であることは，四角形が平行四辺形であるための $\boxed{\quad\quad}$。

(2)　四角形が平行四辺形であることは，四角形が長方形であるための $\boxed{\quad\quad}$。

(3)　xy が無理数であることは，x，y がともに無理数であるための $\boxed{\quad\quad}$。

(4)　「$x+y<0$ かつ $xy>0$」は「$x<0$ かつ $y<0$」であるための $\boxed{\quad\quad}$。

① 必要十分条件である

② 必要条件であるが十分条件ではない

③ 十分条件であるが必要条件ではない

④ 必要条件でも十分条件でもない

解答

(1)　長方形 $\Rightarrow$ 平行四辺形　は真

平行四辺形 $\Rightarrow$ 長方形　は偽　（反例は，4 つの角が 90° ではない平方四辺形）

よって　③

(2)　(1)の結果から　②

(3)　xy が無理数 $\Rightarrow$ x，y がともに無理数　は偽　（反例は　$x=2$，$y=\sqrt{3}$）

x，y がともに無理数 $\Rightarrow$ xy が無理数　は偽　（反例は　$x=\sqrt{3}$，$y=\sqrt{3}$）

よって　④

(4)　$xy>0$ のとき，「$x>0$ かつ $y>0$」または「$x<0$ かつ $y<0$」のどちらかである。ここで，$x+y<0$ であるから，「$x<0$ かつ $y<0$」である。

よって，「$x+y<0$ かつ $xy>0$」 $\Rightarrow$ 「$x<0$ かつ $y<0$」　は真

また，「$x<0$ かつ $y<0$」$\Rightarrow$ 「$x+y<0$ かつ $xy>0$」は真

したがって　①

$\boxed{4}$
n^2 が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数であることを証明せよ。ただし，n は整数とする。

証明

与えられた命題の対偶は，　n が 3 の倍数でないならば，n^2 は 3 の倍数でない。
n が 3 の倍数でないとき，整数 k を用いて，$n=3k+1$ または $n=3k+2$ と表すことができる。
$n=3k+1$ のとき

$$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$$

$n=3k+2$ のとき

$$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$$

ここで，$3k^2+2k$，$3k^2+4k+1$ は整数であるから，n^2 は 3 の倍数ではない。
よって，対偶は真であるから，もとの命題も真である。

$\boxed{5}$
$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。ただし，n を自然数とするとき，n^2 が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数であることを用いてよいものとする。

証明

$\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると，1 以外に正の公約数をもたない自然数 a，b を用いて

$$\sqrt{3}=\frac{a}{b}$$

と表すことができる。このとき　$a=\sqrt{3}\,b$
両辺を 2 乗すると　　　　　　$a^2=3b^2$　……①
これより，a^2 は 3 の倍数であるから，a も 3 の倍数である。よって，ある自然数 c を用いて，$a=3c$ と表すことができる。これを①に代入すると

$$9c^2=3b^2 \qquad \text{すなわち} \quad b^2=3c^2$$

これより，b^2 は 3 の倍数であるから，b も 3 の倍数である。
以上から，a，b はともに 3 の倍数である。
これは，a，b が 1 以外に正の公約数をもたないことに矛盾する。
したがって，$\sqrt{3}$ は無理数である。