数列

1

(1)　次の数列の一般項 a_n，初項から第 n 項までの和 S_n をそれぞれ求めよ。

①　初項が 7，公差が－3 の等差数列　　②　初項が 4，公比が $\frac{1}{2}$ の等比数列

(2)　第 7 項が 5，第 20 項が－21 である等差数列$\{a_n\}$について，次の問いに答えよ。

①　初項 a，公差 d を求めよ。

②　初項から第何項までの和が最大となるか。また，その最大値を求めよ。

(3)　等比数列$\{b_n\}$について，$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}=\frac{2}{3}$，$\frac{1}{b_3}+\frac{1}{b_4}=\frac{2}{27}$ が成り立っている。このとき，$\frac{1}{b_5}+\frac{1}{b_6}$ を求めよ。

解答

(1)　①　$a_n=7+(n-1)\cdot(-3)=\mathbf{-3n+10}$,　$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 7+(n-1)\cdot(-3)\}=\mathbf{-\frac{3}{2}n^2+\frac{17}{2}n}$

②　$a_n=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^2\cdot 2^{-(n-1)}=\mathbf{2^{3-n}}$,　$S_n=\dfrac{4\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=8-8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\mathbf{8-2^{3-n}}$

(2)　①　$a_7=a+(7-1)\cdot d=a+6d$，$a_{20}=a+(20-1)\cdot d=a+19d$

$a_7=5$，$a_{20}=-21$ であるから　$\begin{cases} a+6d=5 \\ a+19d=-21 \end{cases}$　これを解くと　$\mathbf{a=17}$，$\mathbf{d=-2}$

②　$a_n=17+(n-1)\cdot(-2)=-2n+19$　　$a_n>0$ となるような n の範囲は　$-2n+19>0$

これを解いて　$n<\frac{19}{2}=9.5$　　よって，a_1 から a_9 までは正の数，a_{10} から負の数になるから，

第 9 項までの和が最大となる。また，その**最大値**は　$S_9=\frac{1}{2}\cdot 9\{2\cdot 17+(9-1)\cdot(-2)\}=\mathbf{81}$

(3)　等比数列$\{b_n\}$の初項を b，公比を r とすると

$b_1=b$，$b_2=br$，$b_3=br^2$，$b_4=br^3$，$b_5=br^4$，$b_6=br^5$

これから　$\frac{1}{b}+\frac{1}{br}=\frac{2}{3}$，$\frac{1}{br^2}+\frac{1}{br^3}=\frac{2}{27}$　　$\frac{1}{br^2}+\frac{1}{br^3}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{br}\right)$ であるから

$\frac{1}{b}+\frac{1}{br}=\frac{2}{3}$ を代入すると　$\frac{2}{3r^2}=\frac{2}{27}$　　よって　$r^2=9$

$\frac{1}{b_5}+\frac{1}{b_6}=\frac{1}{br^4}+\frac{1}{br^5}=\frac{1}{r^4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{br}\right)$ であるから　$\frac{1}{b}+\frac{1}{br}=\frac{2}{3}$，$r^2=9$ を代入すると　$\frac{1}{9^2}\cdot\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{2}{243}}$

$\boxed{2}$
互いに異なる 3 つの数 x, y, z があり，$x+y+z=3$ を満たしている。x, y, z はこの順で等差数列をなし，z, x, y はこの順で等比数列をなしている。このとき，x, y, z をそれぞれ求めよ。

解答

等差中項，等比中項の性質から $\begin{cases} 2y=x+z & \cdots\cdots ① \\ x^2=yz & \cdots\cdots ② \end{cases}$

条件より $x+z=3-y$ であるから，これを①に代入すると　$2y=3-y$　よって　$y=1$

②より　$x^2=z$　……②′　また，条件より $x+z=2$ であるから②′ を代入すると

$x+x^2=2$　　$(x+2)(x-1)=0$　　$x=-2,\ 1$　　x, y は異なるので　$x\neq 1$

$x=-2$ のとき，②′ から　$z=4$　　以上から　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(-2,\ 1,\ 4)}$

$\boxed{3}$　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　2，5，8，11，14，……　　　(2)　1，8，27，64，125，……

(3)　1，1−2，1−2＋4，1−2＋4−8，1−2＋4−8＋16，……

解答

(1)　一般項 a_n は，$a_n=2+(n-1)\cdot 3=3n-1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-1)=3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=\frac{1}{2}n\{3(n+1)-2\}=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(3n+1)}$$

(2)　一般項 a_n は，$a_n=n^3$ であるから　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$

(3)　この数列の第 n 項は，初項が 1，公比が−2，項数が n の等比数列の和であるから

$$a_n=\frac{\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot(-2)^n$$

したがって，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot(-2)^k\right\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\cdot(-2)^{k-1}=\frac{1}{3}n+\frac{\frac{2}{3}\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{1}{3}n+\frac{2}{9}\{1-(-2)^n\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{9}(-2)^{n+1}+\frac{1}{3}n+\frac{2}{9}}$$

$\boxed{4}$　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{1\cdot 2}$, $\dfrac{1}{2\cdot 3}$, $\dfrac{1}{3\cdot 4}$, $\dfrac{1}{4\cdot 5}$, $\dfrac{1}{5\cdot 6}$, ……　　　(2)　$1\cdot 3$, $2\cdot 9$, $3\cdot 27$, $4\cdot 81$, $5\cdot 243$, ……

(3)　$\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}+2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, $\dfrac{1}{2+\sqrt{6}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$, ……

解答

(1)　一般項は $\dfrac{1}{n(n+1)}$ であり，$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ であるから

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cancel{\cdots\cdots}+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\boldsymbol{\frac{n}{n+1}}$$

(2)　一般項は $n\cdot3^n$ であるから，求める和を S とすると

$$\begin{array}{rl} S= & 1\cdot3+2\cdot9+3\cdot27+\cdots\cdots+n\cdot3^n \\ -)\quad 3S= & \qquad\quad 1\cdot9+2\cdot27+\cdots\cdots+(n-1)\cdot3^n+n\cdot3^{n+1} \\ \hline S-3S= & 1\cdot3+1\cdot9+1\cdot27+\cdots\cdots+1\cdot3^n-n\cdot3^{n+1} \end{array}$$

$$-2S=(3+9+27+\cdots\cdots+3^n)-n\cdot3^{n+1}=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\cdot3^{n+1}=\frac{3^{n+1}}{2}-\frac{3}{2}-n\cdot3^{n+1}$$

よって　$S=\boldsymbol{\dfrac{(2n-1)\cdot3^{n+1}+3}{4}}$

(3)　第 k 項は $\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$ であり，$\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}=\dfrac{\sqrt{k}-\sqrt{k+2}}{k-(k+2)}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$ であるから，

この式に $k=1$，2，……，n を代入して，辺々を加えると

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}+2}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$$

$$=\frac{1}{2}\{(\cancel{\sqrt{3}}-1)+(\cancel{2}-\sqrt{2})+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{2})+\cancel{\cdots\cdots}$$

$$\cancel{\cdots\cdots}+(\cancel{\sqrt{n-1}}-\cancel{\sqrt{n-3}})+(\cancel{\sqrt{n}}-\cancel{\sqrt{n-2}})+(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n-1}})+(\sqrt{n+2}-\cancel{\sqrt{n}})\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})}$$

$\boxed{5}$

数列 5，55，555，5555，55555，…… の一般項 a_n と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

解答

求める数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とする。

数列$\{b_n\}$は，50，500，5000，50000，…… であるから，初項 50，公比 10 の等比数列である。

よって　$b_n=50\cdot10^{n-1}=5\cdot10^n$　　したがって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}5\cdot10^k=5+\frac{50(10^{n-1}-1)}{10-1}=5+\frac{50}{9}\cdot10^{n-1}-\frac{50}{9}=\frac{5}{9}(10^n-1)$$

また，$n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{5}{9}(10^1-1)=5$ より，数列$\{a_n\}$の初項と一致する。以上から　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{5}{9}(10^n-1)}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{9}(10^k-1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{50}{9}\cdot10^{k-1}-\frac{5}{9}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{\frac{50}{9}(10^n-1)}{10-1}-\frac{5}{9}n=\frac{50}{81}\cdot10^n-\frac{50}{81}-\frac{5}{9}n=\boldsymbol{\frac{5}{81}(10^{n+1}-9n-10)}$$

$\boxed{6}$
初項から第 n 項までの和 S_n と，一般項 a_n が　$S_n=a_n+n^2-n$　という関係を満たしている数列$\{a_n\}$の，一般項 a_n を求めよ。

解答

$n\geqq 2$ のとき，$a_n=S_n-S_{n-1}$ であるから　　$S_n=a_n+n^2-n=S_n-S_{n-1}+n^2-n$　　これより　$S_{n-1}=n^2-n$
この式で n を $n+1$ に置き換えると　$S_n=(n+1)^2-(n+1)=n^2+2n+1-n-1=n^2+n$　$(n\geqq 1)$
与えられた式に代入すると　$n^2+n=a_n+n^2-n$　　よって　$\boldsymbol{a_n=2n}$

$\boxed{7}$　1 から順にならべた自然数を

1｜2，3｜4，5，6｜7，8，9，10｜11，12，13，14，15｜16，……

のように，第 n 群に n 個の数を含むように分けた群数列について，次の問いに答えよ。
(1)　第 10 群の最初の数を求めよ。
(2)　第 10 群に含まれる数の総和を求めよ。
(3)　第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

解答

(1)　第 1 群から第 9 群までの項の総数は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{9}k=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot(9+1)=45$

よって，第 10 群の最初の数は　**46**

(2)　第 10 群は，初項が 46，公差が 1，項数が 10 の等差数列であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\{2\cdot 46+(10-1)\cdot 1\}=5\cdot 101=\mathbf{505}$$

(3)　第 1 群から第$(n-1)$群までの項の総数は

$$\sum_{k=1}^{k-1}k=\frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$$

よって，第 n 群は初項が$\dfrac{1}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n+1$，公差が 1，項数が n の等差数列であるから

$$\frac{1}{2}n\left\{2\cdot\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1\right)+(n-1)\cdot 1\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n^2+1)}$$

$\boxed{8}$　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2n$ $(n=1，2，3，……)$ で定義される数列$\{a_n\}$について，次の問いに答えよ。
(1)　a_{n+2} を，a_{n+1}，n を用いて表せ。
(2)　$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおいて，b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
(3)　b_n を求めよ。
(4)　a_n を求めよ。

解答

(1)　$\boldsymbol{a_{n+2}}=3a_{n+1}+2(n+1)\boldsymbol{=3a_{n+1}+2n+2}$

(2)
$$
\begin{array}{rl}
 & a_{n+2}=3a_{n+1}+2n+2 \\
-\;) & \underline{a_{n+1}=3a_n\quad+2n\quad} \\
 & a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+2
\end{array}
$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$a_{n+2}-a_{n+1}=b_{n+1}$ であるから　$\boldsymbol{b_{n+1}=3b_n+2}$

(3)　特性方程式 $\alpha=3\alpha+2$ から　$\alpha=-1$　　よって，$b_{n+1}=3b_n+2$ は $b_{n+1}+1=3(b_n+1)$ と変形できる。

$c_n=b_n+1$ とおくと，$b_{n+1}+1=c_{n+1}$ であるから　$c_{n+1}=3c_n$

ここで，$c_1=b_1+1=(a_2-a_1)+1=3a_1+2\cdot1-a_1+1=3\cdot1+2\cdot1-1+1=5$ より

$c_n=5\cdot3^{n-1}$　　したがって　$\boldsymbol{b_n=5\cdot3^{n-1}-1}$

(4)　求める数列$\{a_n\}$の階差数列が$\{b_n\}$であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(5\cdot3^{k-1}-1)=1+\frac{5(3^{n-1}-1)}{3-1}-(n-1)=\frac{5}{2}\cdot3^{n-1}-n-\frac{1}{2}$$

また，$n=1$ のとき，$a_1=\frac{5}{2}\cdot3^0-1-\frac{1}{2}=1$ より，数列$\{a_n\}$の初項と一致する。

以上から　$\boldsymbol{a_n=\frac{5}{2}\cdot3^{n-1}-n-\frac{1}{2}}$

$\boxed{9}$　次のことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1)　すべての自然数 n について，n^2+n は偶数である。

(2)　2 以上のすべての自然数 n について，n^3-n は 6 の倍数である。

証明

(1)　(ⅰ)　$n=1$ のとき，$1^2+1=2$ より，偶数である。

(ⅱ)　$n=k$ のとき，k^2+k が偶数であると仮定する。このとき，$n=k+1$ について考えると

$$(k+1)^2+(k+1)=k^2+2k+1+k+1=(k^2+k)+2k+2$$

ここで，k^2+k は偶数であるので，自然数 m を用いて，$k^2+k=2m$ とおける。よって，

$(k^2+k)+2k+2=2m+2k+2=2(m+k+1)$　から，$(k+1)^2+(k+1)$ も偶数である。

(ⅰ)，(ⅱ)から，すべての自然数 n について，n^2+n は偶数である。

(2)　(ⅰ)　$n=2$ のとき，$2^3-2=6$ より，6 の倍数である。

(ⅱ)　$k\geqq2$ として，$n=k$ のとき k^3-k が 6 の倍数であると仮定する。

このとき，$n=k+1$ について考えると

$$(k+1)^3-(k+1)=k^3+3k^2+3k+1-k-1=(k^3-k)+3(k^2+k)$$

ここで，k^3-k は 6 の倍数であるので，自然数 l を用いて，$k^3-k=6l$ とおける。また(1)より，

k^2+k は偶数であるので，自然数 m を用いて，$k^2+k=2m$ とおける。よって，

$(k^3-k)+3(k^2+k)=6l+3\cdot2m=6(l+m)$　から，$(k+1)^3-(k+1)$ も 6 の倍数である。

(ⅰ)，(ⅱ)から，2 以上のすべての自然数 n について，n^3-n は 6 の倍数である。