

指数関数・対数関数

1

次の計算をせよ。ただし、(2)では $x > 0$ 、(3)では $x > 0, y > 0$ とする。

$$(1) \quad 9^2 \times \frac{1}{27} \div 3^3$$

$$(2) \quad \frac{1}{x^2} \div \sqrt{\frac{1}{x^3}}$$

$$(3) \quad \sqrt[4]{x^3 y} \times \sqrt{\frac{y}{x}} \div \sqrt[4]{\frac{y^3}{x}}$$

$$(4) \quad \sqrt[3]{-8} \div 4^{0.25}$$

解答

$$(1) \quad 9^2 \times \frac{1}{27} \div 3^3 = 3^4 \times 3^{-3} \times 3^{-3} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$(2) \quad \frac{1}{x^2} \div \sqrt{\frac{1}{x^3}} = x^{-2} \div x^{-\frac{3}{2}} = x^{-2} \times x^{\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \sqrt[4]{x^3 y} \times \sqrt{\frac{y}{x}} \div \sqrt[4]{\frac{y^3}{x}} &= (x^3 y)^{\frac{1}{4}} \times (y x^{-1})^{\frac{1}{2}} \div (y^3 x^{-1})^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \times y^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \div y^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{4}} \\ &= x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \times y^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \times y^{-\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = x^2 y^0 = \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2, \quad 4^{0.25} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{よって } \sqrt[3]{-8} \div 4^{0.25} = (-2) \div \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

2

(1) $x > 0$, $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = -2$ のとき, $x + x^{-1}$ の値を求めよ。

(2) $x > 0$, $x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = 3$ のとき, $x + x^{-1}$ の値を求めよ。

(3) $3^x - 3^{-x} = 2$ のとき, 次の値を求めよ。

① $3^x + 3^{-x}$

② 3^x

解答

$$(1) \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = x - 2 + x^{-1}$$

$$x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = -2 \text{ から } 4 = x - 2 + x^{-1} \quad \text{よって } x + x^{-1} = \mathbf{6}$$

$$(2) \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3 \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} + 3 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^3 = x + 3x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-\frac{1}{3}} + x^{-1}$$

$$= x + x^{-1} + 3\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = 3 \text{ から } 3^3 = x + x^{-1} + 3 \cdot 3 \quad \text{よって } x + x^{-1} = \mathbf{18}$$

$$(3) \text{ ① } (3^x - 3^{-x})^2 = (3^x)^2 - 2 \cdot 3^x \cdot (3^{-x}) + (3^{-x})^2 = 3^{2x} - 2 + 3^{-2x} = 3^{2x} + 3^{-2x} - 2$$

$$\text{ここで, } 3^x - 3^{-x} = 2 \text{ から } 2^2 = 3^{2x} + 3^{-2x} - 2 \quad \text{よって } 3^{2x} + 3^{-2x} = 6$$

$$\text{また, } (3^x + 3^{-x})^2 = 3^{2x} + 3^{-2x} + 2 \text{ から } (3^x + 3^{-x})^2 = 6 + 2 = 8$$

$$\text{ここで, } 3^x > 0, 3^{-x} > 0 \text{ であるから } 3^x + 3^{-x} > 0 \quad \text{よって } 3^x + 3^{-x} = \mathbf{2\sqrt{2}}$$

$$\text{② } 3^x - 3^{-x} = 2, \quad 3^x + 3^{-x} = 2\sqrt{2} \text{ から } 3^x = \mathbf{1 + \sqrt{2}}$$

3

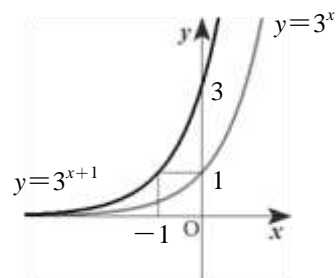
次の関数のグラフをかき、 $y=3^x$ との位置関係を答えよ。

(1) $y = 3^{x+1}$

(2) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$

解答

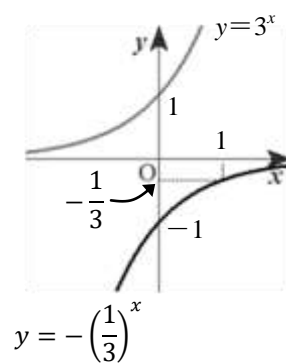
(1) $f(x)=3^x$ とすると、 $3^{x+1}=f(x+1)$ である
 ので、 $y=3^{x+1}$ のグラフは $y=3^x$ のグラフ
 を x 軸方向に -1 だけ平行移動したグラフ
 である。



(2) $f(x)=3^x$ とする。

$$-\left(\frac{1}{3}\right)^x = -(3^{-1})^x = -3^{-x} = -f(-x)$$

であるので、 $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフは $y = 3^x$ の
 グラフを原点に関して対称移動したグラフ
 である。



4

- (1) 次の3数の大小を比較せよ。 $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[10]{2}$
- (2) 次の2数の大小を比較せよ。 $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{6}$

解答

$$(1) \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 2^{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = 2^{\frac{3-2}{12}} = 2^{\frac{1}{12}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{4}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{5}}} = 2^{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}} = 2^{\frac{5-4}{10}} = 2^{\frac{1}{10}}, \quad \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[10]{2}} = \frac{2^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{10}}} = 2^{\frac{1}{6} - \frac{1}{10}} = 2^{\frac{5-3}{30}} = 2^{\frac{1}{15}}$$

底2は1より大きく、指数の大小は、 $\frac{1}{15} < \frac{1}{12} < \frac{1}{10}$ であるから $2^{\frac{1}{15}} < 2^{\frac{1}{12}} < 2^{\frac{1}{10}}$

すなわち $\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[10]{2}} < \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{2}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{4}}$

- (2) $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{6}$ のそれぞれを10乗すると

$$(\sqrt{2})^{10} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10} = 2^5 = 32, \quad (\sqrt[5]{6})^{10} = \left(6^{\frac{1}{5}}\right)^{10} = 6^2 = 36$$

$32 < 36$ であるから $\sqrt{2} < \sqrt[5]{6}$

5

次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^{x-1} = 2\sqrt{2}$

(2) $4^{x-1} \geq 2\sqrt{2}$

(3) $\left(\frac{1}{9}\right)^x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $8^x - 2^{x+2} = 0$

解答

(1) $4^{x-1} = (2^2)^{x-1} = 2^{2x-2}$, $2\sqrt{2} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$ より $2^{2x-2} = 2^{\frac{3}{2}}$

よって $2x - 2 = \frac{3}{2}$ したがって $x = \frac{7}{4}$

(2) (1)より $2^{2x-2} \geq 2^{\frac{3}{2}}$ 底2は1より大きいから $2x - 2 \geq \frac{3}{2}$ したがって $x \geq \frac{7}{4}$

(3) 底を3にそろえる。

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x = (3^{-2})^x = 3^{-2x}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = 3^{-\frac{1}{2}} \quad \text{よって} \quad 3^{-2x} < 3^{-\frac{1}{2}}$$

底3は1より大きいから $-2x < -\frac{1}{2}$ したがって $x > \frac{1}{4}$

別解 底を $\frac{1}{3}$ にそろえる。

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{よって} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから $2x > \frac{1}{2}$ したがって $x > \frac{1}{4}$

(4) $8^x = (2^3)^x = 2^{3x} = (2^x)^3$, $2^{x+2} = 4 \cdot 2^x$ より ここで, $2^x = t$ とおくと $t > 0$

このとき, 方程式は $t^3 - 4t = 0$ $t(t+2)(t-2) = 0$ $t > 0$ であるから $t = 2$

すなわち $2^x = 2$ これを解いて $x = 1$

6

- (1) 関数 $y=6 \cdot 3^x - 9^{x+1}$ における最大値を求めよ。
 (2) $y=2(2^x+2^{-x})+4^x+4^{-x}$ とする。 $2^x+2^{-x}=t$ とおくと、 y を t を用いて表せ。
 また、関数 y の最小値を求めよ。

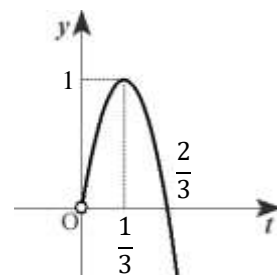
解答

(1) $3^x=t$ とおくと $t > 0$

このとき関数は $y=6 \cdot 3^x - 9^{x+1} = -9 \cdot (3^x)^2 + 6 \cdot 3^x$

$$= -9t^2 + 6t = -9\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 1$$

$t > 0$ であるから、右のグラフより、 $t = \frac{1}{3}$ のとき最大値 1 をとる。



$t = \frac{1}{3}$ のとき $3^x = \frac{1}{3}$ よって $x = -1$

したがって、この関数は $x = -1$ のとき最大値 1 をとる。

(2) $(2^x+2^{-x})^2 = (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + (2^{-x})^2 = 2^{2x} + 2 \cdot 2^{x-x} + 2^{-2x} = (2^2)^x + 2 \cdot 2^0 + (2^2)^{-x} = 4^x + 2 + 4^{-x}$

よって、 $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ と表すことができる。

したがって $y = 2(2^x + 2^{-x}) + 4^x + 4^{-x} = 2t + (t^2 - 2) = t^2 + 2t - 2$

また、 $2^x > 0$ 、 $2^{-x} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

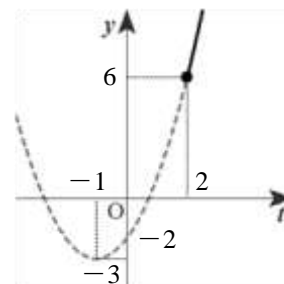
ここで $y = t^2 + 2t - 2 = (t+1)^2 - 3$

右のグラフより、 $t = 2$ のとき最小値 6 をとる。

ここで $t = 2$ すなわち $2^x + 2^{-x} = 2$ を満たす x は相加平均と相乗平均の大小関係において等号が成立しているときであるから

$$2^x = 2^{-x} \quad \text{よって} \quad x = -x \quad x = 0$$

したがって、この関数は $x = 0$ のとき最小値 6 をとる。



7

(1) 次の対数の値を求めよ。

① $\log_2 \frac{1}{8}$

② $\log_3 \sqrt{3}$

(2) 次の式を簡単にせよ。

① $\log_4 8 - \log_4 2$

② $\log_{12} 8 + \log_{12} 18$

(3) 次の式を簡単にせよ。

① $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4}$

② $\log_4 9 \cdot \log_3 8$

解答

(1) ① $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$

② $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

(2) ① $\log_4 8 - \log_4 2 = \log_4 \frac{8}{2} = \log_4 4 = 1$

② $\log_{12} 8 + \log_{12} 18 = \log_{12} 144 = \log_{12} 12^2 = 2$

(3) ① 底を 2 に変換する。 $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = \frac{\log_2 \frac{1}{4}}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 2^{-2}}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$

② 底を 2 にそろえる。 $\log_4 9 \cdot \log_3 8 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 3} = \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2} \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 3} = \frac{2 \log_2 3}{2} \cdot \frac{3}{\log_2 3} = 3$

別解 底を 3 にそろえる。

$$\log_4 9 \cdot \log_3 8 = \frac{\log_3 9}{\log_3 4} \cdot \log_3 8 = \frac{\log_3 3^2}{\log_3 2^2} \cdot \log_3 2^3 = \frac{2}{2 \log_3 2} \cdot 3 \log_3 2 = 3$$

8

$\log_3 5 = a$, $\log_7 9 = b$ とするとき, $\log_5 7$ を a , b で表せ。

解答

$$\log_5 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 5} = \frac{\log_3 7}{a}$$

ここで, $b = \log_7 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 7} = \frac{\log_3 3^2}{\log_3 7} = \frac{2}{\log_3 7}$ であるから $\log_3 7 = \frac{2}{b}$

よって $\log_5 7 = \frac{\frac{2}{b}}{a} = \frac{2}{ab}$

9

次の空欄を埋めよ。

$y = \log_8 4(x-1)^3$ のグラフは、 $y = \log_2 x$ のグラフを x 軸方向に , y 軸方向に だけ平行移動したグラフである。

解答

底の変換公式を利用して、 $\log_8 4(x-1)^3$ の底を 2 に変換する。

$$\log_8 4(x-1)^3 = \frac{\log_2 4(x-1)^3}{\log_2 8} = \frac{\log_2 4 + \log_2(x-1)^3}{\log_2 2^3} = \frac{\log_2 2^2 + 3 \log_2(x-1)}{3} = \frac{2}{3} + \log_2(x-1)$$

$f(x) = \log_2 x$ とすると、 $\log_2(x-1) = f(x-1)$ であるから、 $y = \log_8 4(x-1)^3$ のグラフは $y = \log_2 x$ のグラフを x 軸方向に **1**, y 軸方向に $\frac{2}{3}$ だけ平行移動したグラフである。

10

(1) 次の3数の大小を比較せよ。 2 , $\log_2 6$, $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{27}$

(2) 次の2数の大小を比較せよ。 $\log_2 3$, $\log_3 4$

解答

(1) $2 = 2 \cdot \log_2 2 = \log_2 2^2 = \log_2 4$

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{27} = \frac{\log_2 \frac{1}{27}}{\log_2 \frac{1}{4}} = \frac{\log_2 3^{-3}}{\log_2 2^{-2}} = \frac{-3 \log_2 3}{-2} = \frac{3}{2} \cdot \log_2 3 = \log_2 3^{\frac{3}{2}} = \log_2 \sqrt{27}$$

底2は1より大きく、 $4 < \sqrt{27} < 6$ であるから $\log_2 4 < \log_2 \sqrt{27} < \log_2 6$

すなわち $2 < \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{27} < \log_2 6$

(2) $P = \log_2 3 - \log_3 4$ とおく。

$$P = \log_2 3 - \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \frac{(\log_2 3)^2 - 2}{\log_2 3}$$

ここで $(\log_2 3)^2 - 2 = (\log_2 3 + \sqrt{2})(\log_2 3 - \sqrt{2})$

$\log_2 3 > 0$ より $\frac{1}{\log_2 3} > 0$, $\log_2 3 + \sqrt{2} > 0$ であるから、 $\log_2 3 - \sqrt{2}$ の正負と P の正負が一致する。

ここで、 $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$ であるから

$$\log_2 3 - \sqrt{2} > \log_2 3 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(2 \log_2 3 - 3) = \frac{1}{2}(\log_2 3^2 - \log_2 2^3) = \frac{1}{2}(\log_2 9 - \log_2 8) > 0$$

したがって、 $P > 0$ であるから $\log_2 3 > \log_3 4$

11

(1) $4^{\log_2 \sqrt{2}}$ の値を求めよ。

(2) 次の方程式を解け。

① $\log_3(x+1) = \log_9(x+3)$

② $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^2 = 0$

(3) 次の不等式を解け。

① $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+5) > -2$

② $\log_2 x + \log_4(x+1) < \frac{1}{2}$

解答(1) $4^{\log_2 \sqrt{2}} = x$ とおき、両辺の2を底とする対数をとると

$$\log_2 4^{\log_2 \sqrt{2}} = \log_2 x \quad \text{すなわち} \quad \log_2 \sqrt{2} \cdot \log_2 4 = \log_2 x$$

$$\text{ここで} \quad \log_2 \sqrt{2} \cdot \log_2 4 = 2 \log_2 \sqrt{2} = \log_2 (\sqrt{2})^2 = \log_2 2$$

$$\text{よって} \quad \log_2 2 = \log_2 x \quad \text{したがって} \quad x=2$$

(2) ① 真数は正であるから $x+1 > 0$ かつ $x+3 > 0$ すなわち $x > -1$ ……(i)

$$\text{ここで, } \log_9(x+3) = \frac{\log_3(x+3)}{\log_3 9} = \frac{\log_3(x+3)}{2} \text{ であるから, 方程式の両辺に2を掛けると}$$

$$2 \log_3(x+1) = \log_3(x+3) \quad \text{すなわち} \quad \log_3(x+1)^2 = \log_3(x+3)$$

$$\text{よって, } (x+1)^2 = (x+3) \text{ から } x^2 + 2x + 1 = x + 3 \quad \text{整理すると } (x+2)(x-1) = 0$$

$$(i) \text{ から } x=1$$

(2) ② 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x^2 > 0$ すなわち $x > 0$ ……(i)

$$\log_{\frac{1}{2}} x = t \text{ とおくと, } \log_{\frac{1}{2}} x^2 = 2 \log_{\frac{1}{2}} x = 2t \text{ から, 方程式は } t^2 + 2t = 0 \quad t(t+2) = 0$$

$$\text{これを解くと } t = 0, -2 \quad \text{すなわち} \quad \log_{\frac{1}{2}} x = 0, -2 \quad \text{よって} \quad x = \left(\frac{1}{2}\right)^0, \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\text{したがって } x=1, 4 \quad \text{これは, (i) を満たす。}$$

(3) ① $x^2+5 > 0$ であるから、真数はつねに正である。

$$-2 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{3}} 9 \quad \text{よって, 不等式は } \log_{\frac{1}{3}}(x^2+5) > \log_{\frac{1}{3}} 9$$

$$\text{底} \frac{1}{3} \text{ は } 1 \text{ より小さいから } x^2 + 5 < 9 \quad x^2 - 4 < 0 \quad \text{したがって} \quad -2 < x < 2$$

② 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x + 1 > 0$ すなわち $x > 0$ ……(i)

ここで、 $\log_4(x + 1) = \frac{\log_2(x + 1)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(x + 1)}{2}$ であるから、不等式の両辺に 2 を掛けると

$$2\log_2 x + \log_2(x + 1) < 1 \quad \text{すなわち} \quad \log_2 x^2(x + 1) < \log_2 2$$

よって、底 2 は 1 より大きいから $x^2(x + 1) < 2$

$$\text{すなわち} \quad x^3 + x^2 - 2 < 0$$

左辺を因数分解すると $(x - 1)(x^2 + 2x + 2) < 0$

$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$ であることから、

不等式の解は $x < 1$ ……(ii)

(i), (ii) の共通な範囲を求めて $0 < x < 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \underline{0} \end{array}$$

12

(1) 関数 $y = \left(\log_{\frac{1}{9}} x\right)^2 + \log_3 x$ の最小値を求めよ。

(2) 関数 $y = (\log_2 2x) \left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)$ の最大値を求めよ。

解答

(1) $\log_{\frac{1}{9}} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{9}} = \frac{\log_3 x}{-2}$ より, $y = \frac{(\log_3 x)^2}{4} + \log_3 x$ であるから

$$\log_3 x = t \text{ とおくと } y = \frac{t^2}{4} + t = \frac{1}{4}(t^2 + 4t) = \frac{1}{4}\{(t+2)^2 - 4\} = \frac{1}{4}(t+2)^2 - 1$$

$t = -2$ のとき最小値 -1 をとる。 $t = -2$ のとき $\log_3 x = -2$ よって $x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

したがって, この関数は $x = \frac{1}{9}$ のとき最小値 -1 をとる。

(2) $y = (\log_2 2x) \left(\log_{\frac{1}{4}} x\right) = (1 + \log_2 x) \left(\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{4}}\right) = (1 + \log_2 x) \left(\frac{\log_2 x}{-2}\right)$ であるから

$$\log_2 x = t \text{ とおくと } y = (1+t) \left(-\frac{1}{2}t\right) = -\frac{1}{2}(t^2 + t) = -\frac{1}{2}\left\{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} = -\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}$$

$t = -\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{1}{8}$ をとる。 $t = -\frac{1}{2}$ のとき $\log_2 x = -\frac{1}{2}$ よって $x = 2^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

したがって, この関数は $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値 $\frac{1}{8}$ をとる。

13

$\log_{10}2=0.3010$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 5^{20} は何桁の整数か。

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{25}$ は小数で表すと、小数第何位に初めて0でない数字が現れるか。

解答

(1) 5^{20} の常用対数の値を求める。

$$\log_{10} 5^{20} = 20 \log_{10} 5 = 20 \log_{10} \frac{10}{2} = 20(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) = 20(1 - 0.3010) = 13.98$$

よって $5^{20} = 10^{13.98}$ $10^{13} < 10^{13.98} < 10^{14}$ であるから $10^{13} < 5^{20} < 10^{14}$

したがって、 5^{20} は **14 桁** の整数である。

(2) $\log_{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{25} = 25 \log_{10} \frac{1}{4} = 25 \cdot (-\log_{10} 4) = 25 \cdot (-2 \log_{10} 2) = 25 \cdot (-2 \cdot 0.3010) = -15.05$

よって $\left(\frac{1}{4}\right)^{25} = 10^{-15.05}$ $10^{-16} < 10^{-15.05} < 10^{-15}$ であるから $10^{-16} < \left(\frac{1}{4}\right)^{25} < 10^{-15}$

したがって $\left(\frac{1}{4}\right)^{25}$ は **小数第16位** に初めて0でない数字が現れる。

研究

$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とし, $N=6^{20}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) N は何桁の整数か。 (2) N の最高位の数を求めよ。 (3) N の一の位の数を求めよ。

解答

(1) $\log_{10}6^{20}=20\log_{10}6=20(\log_{10}2+\log_{10}3)=20(0.3010+0.4771)=15.562$

よって $6^{20}=10^{15.562}$ $10^{15}<10^{15.562}<10^{16}$ であるから $10^{15}<6^{20}<10^{16}$

したがって, 6^{20} は **16 桁** の整数である。

(2) (1)から $\log_{10}6^{20}=15.562=15+0.562$ ここで, $\log_{10}3=0.4771$, $\log_{10}4=2\log_{10}2=0.6020$ であるから

$\log_{10}3<0.562<\log_{10}4$ よって $3<10^{0.562}<4$

各辺に 10^{15} を掛けると $3\cdot 10^{15}<10^{15.562}<4\cdot 10^{15}$ すなわち $3\cdot 10^{15}<6^{20}<4\cdot 10^{15}$

したがって, 6^{20} の最高位の数は **3**

(3) 6 を n 乗したときの一の位の数を a_n とする。

$6^1=6$ より $a_1=6$, $6^2=36$ より $a_2=6$, $6^3=216$ より $a_3=6$, ……

6^n の一の位の数はつねに **6** である。よって $a_{20}=6$

したがって, 6^{20} の一の位の数は **6**