式と曲線

1

次の問いに答えよ。

(1)　焦点が点(−2，0)，準線が直線 $x=2$ である放物線の方程式を求めよ。また，その概形をかけ。

(2)　放物線 $y^2=2x$ の焦点，準線および頂点を求め，その概形をかけ。

(3)　焦点が点(0，3)，準線が直線 $y=-3$ である放物線の方程式を求めよ。また，その概形をかけ。

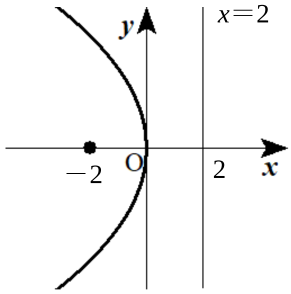
(4)　放物線 $x^2=-4y$ の焦点，準線および頂点を求め，その概形をかけ。

解答

(1)　$y^2=4\cdot(-2)x$

から　$\boldsymbol{y^2=-8x}$

概形は，右の図のようになる。



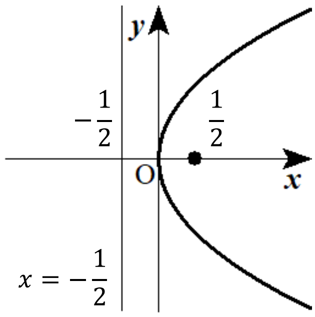
(2)　$y^2=2x$は，$y^2=4\cdot\frac{1}{2}x$と変形できるから

焦点は点$\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{0}\right)$

準線は直線$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$

頂点は原点(0，0)

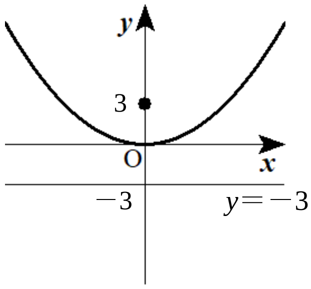
概形は，右の図のようになる。



(3)　$x^2=4\cdot3\cdot y$

から　$\boldsymbol{x^2=12y}$

概形は，右の図のようになる。



(4)　$x^2=-4y$ は，$x^2=4\cdot(-1)y$

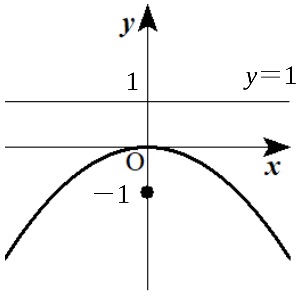
と変形できるから

焦点は点(0，−1)

準線は直線 $\boldsymbol{y=1}$

頂点は原点(0，0)

概形は，右の図のようになる。



2

(1)　楕円$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$の頂点と焦点を求め，その概形をかけ。また，長軸と短軸の長さを求めよ。

(2)　焦点が点(3，0)，(−3，0)で，この 2 点からの距離の和が 8 である楕円の方程式を求めよ。

(3)　楕円$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$の頂点と焦点を求め，その概形をかけ。

(4)　焦点が点(0，1)，(0，−1)で，この 2 点からの距離の和が 4 である楕円の方程式を求めよ。

(5)　円$x^2+y^2=9$を，x軸を基準としてy軸方向に$\dfrac{2}{3}$倍するとどのような曲線になるか。

解答

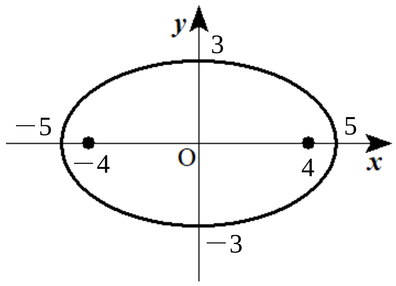
(1)　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ は $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ と変形できるから

頂点は点(5，0)，(−5，0)，(0，3)，(0，−3)

焦点は点$\left(\sqrt{5^2-3^2},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{5^2-3^2},\ 0\right)$

すなわち，**点$\boldsymbol{(4,\ 0)}$，$\boldsymbol{(-4,\ 0)}$**

概形は右の図のようになる。



長軸の長さは 10，　短軸の長さは 6

(2)　焦点が x 軸上にあり，2 つの焦点を結ぶ線分の中点は原点であるから，求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>b>0$$

とおくことができる。

2 つの焦点までの距離の和が 8 であるから　$2a=8$　　よって　$a=4$

焦点は点$\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$であるから　$\sqrt{a^2-b^2}=3$

両辺を 2 乗して　$a^2-b^2=9$　　これに $a=4$ を代入すると　$16-b^2=9$　　したがって　$b^2=7$

以上から，求める楕円の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1}$

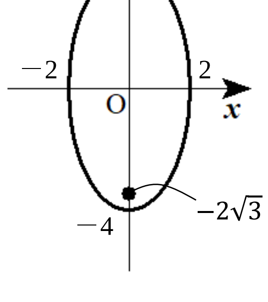
(3)　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$ は $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$ と変形できるから

頂点は点(2，0)，(−2，0)，(0，4)，(0，−4)

焦点は点$\left(0,\ \sqrt{4^2-2^2}\right)$，$\left(0,\ -\sqrt{4^2-2^2}\right)$

すなわち，**点$\boldsymbol{(0,\ 2\sqrt{3})}$，$\boldsymbol{(0,\ -2\sqrt{3})}$**

概形は右の図のようになる。



(4)　焦点が y 軸上にあり，2 つの焦点を結ぶ線分の中点は原点であるから，求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad b>a>0$$

とおくことができる。

2 つの焦点までの距離の和が 4 であるから　$2b=4$　　よって　$b=2$

焦点は点 $\left(0,\ \sqrt{b^2-a^2}\right)$，$\left(0,\ -\sqrt{b^2-a^2}\right)$ であるから　$\sqrt{b^2-a^2}=1$

両辺を 2 乗して　$b^2-a^2=1$　　これに $b=2$ を代入すると　$4-a^2=1$　　したがって　$a^2=3$

以上から，求める楕円の方程式は　$\boldsymbol{\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1}$

(5)　円周上の点を Q(s，t)，点 Q が移される点を P(x，y)とおくと

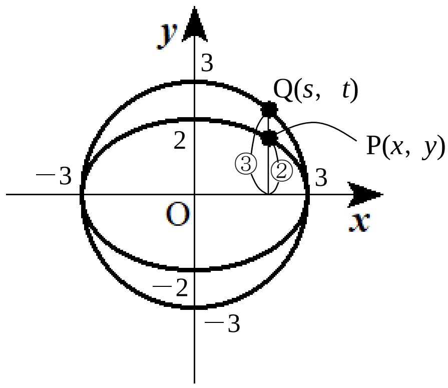
$$x=s,\quad y=\frac{2}{3}t$$

よって　$s=x,\quad t=\frac{3}{2}y$

$s^2+t^2=9$ であるから　$x^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2=9$

整理すると　$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

したがって，求める曲線は　**楕円** $\boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1}$



$\boxed{3}$

(1)　双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ の頂点と焦点，漸近線を求め，その概形をかけ。

(2)　2 点(3，0)，(－3，0)を焦点とし，焦点からの距離の差が 4 である双曲線の方程式を求めよ。

(3)　双曲線 $x^2-4y^2=-16$ の頂点と焦点，漸近線を求め，その概形をかけ。

(4)　2 点(0，4)，(0，－4)を焦点とし，漸近線が 2 直線 $y=\sqrt{3}x$，$y=-\sqrt{3}x$ である双曲線の方程式を求めよ。

解答

(1)　$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ は $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$ と変形できるから

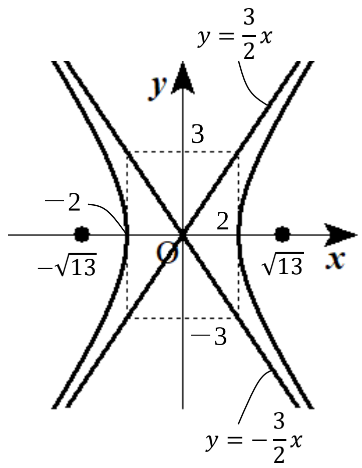
頂点は点(2，0)，(－2，0)

焦点は点 $\left(\sqrt{2^2+3^2},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{2^2+3^2},\ 0\right)$

すなわち，**点$\left(\sqrt{13},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{13},\ 0\right)$**

漸近線は 2直線 $y=\dfrac{3}{2}x$，　$y=-\dfrac{3}{2}x$

概形は右の図のようになる。



(2)　焦点が x 軸上にあり，2 つの焦点を結ぶ線分の中点は原点であるから，求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>0,\ b>0$$

とおくことができる。

2 つの焦点までの距離の差が 4 であるから　$2a=4$　　よって　$a=2$

焦点は点 $\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$ であるから　$\sqrt{a^2+b^2}=3$

両辺を 2 乗して　$a^2+b^2=9$　　これに $a=2$ を代入すると　$4+b^2=9$　　したがって　$b^2=5$

以上から，求める双曲線の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1}$

(3)　$x^2-4y^2=-16$ は $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=-1$ と変形できるから

頂点は点(0，2)，(0，－2)

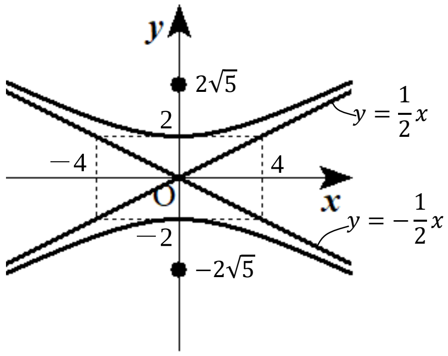
焦点は点$\left(0,\ \sqrt{4^2+2^2}\right)$，$\left(0,\ -\sqrt{4^2+2^2}\right)$

すなわち，**点**$\boldsymbol{\left(0,\ 2\sqrt{5}\right)}$**，**$\boldsymbol{\left(0,\ -2\sqrt{5}\right)}$

漸近線は 2 直線 $y=\dfrac{2}{4}x$，　$y=-\dfrac{2}{4}x$

すなわち，**2直線** $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x,\quad y=-\dfrac{1}{2}x}$

概形は右の図のようになる。



(4)　焦点が y 軸上にあり，2 つの焦点を結ぶ線分の中点は原点であるから，求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,\qquad a>0,\ b>0$$

とおくことができる。

2 つの焦点が$(0,\ 4)$，$(0,\ -4)$であるから　$\sqrt{a^2+b^2}=4$　……①

漸近線が 2 直線 $y=\sqrt{3}x$，　$y=-\sqrt{3}x$であるから　$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$　……②

②から $b=\sqrt{3}a$ であり，これを①に代入すると　$\sqrt{a^2+3a^2}=4$

整理して両辺を 2 乗すると　$4a^2=16$　　$a>0$ より　$a=2$　　②から　$b=2\sqrt{3}$

したがって，求める双曲線の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=-1}$

$\boxed{4}$
次の問いに答えよ。

(1)　放物線$y^2=6x$を，x軸方向に 2，y軸方向に 3 だけ平行移動した放物線の方程式と焦点を求めよ。

(2)　次の方程式はどのような図形を表すか。

①　$4x^2+y^2-8x-4y+4=0$　　　②　$4x^2-y^2-8x-4y+4=0$

解答

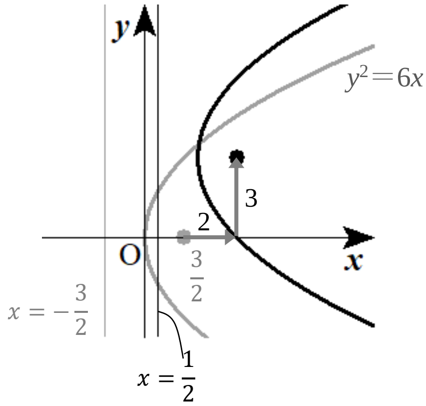
(1)　平行移動後の放物線の方程式は　$\boldsymbol{(y-3)^2=6(x-2)}$

もとの放物線の焦点は

点$\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$

であるから，移動後の放物線の焦点は

点$\boldsymbol{\left(\dfrac{7}{2},\ 3\right)}$



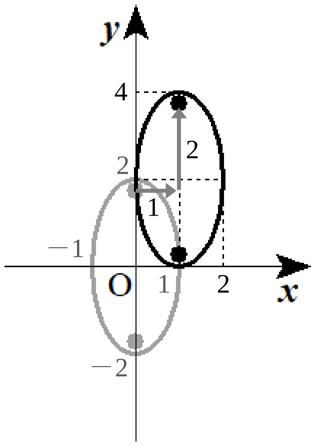
(2)　①　方程式を変形すると

$$4(x^2-2x+1)-4+(y^2-4y+4)-4+4=0$$
$$4(x-1)^2+(y-2)^2=4$$
$$(x-1)^2+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

したがって，与えられた方程式は

楕円$\boldsymbol{x^2+\dfrac{y^2}{4}=1}$**を**$\boldsymbol{x}$**軸方向に1，**$\boldsymbol{y}$**軸方向に2**

だけ平行移動した楕円　を表す。



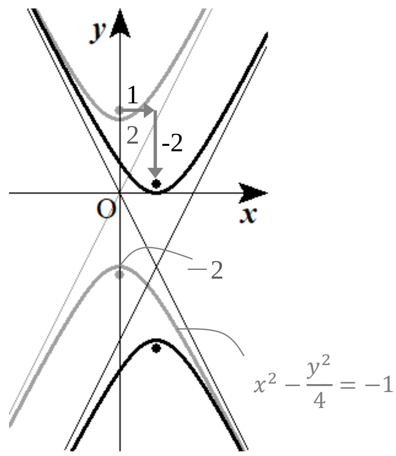
②　方程式を変形すると

$$4(x^2-2x+1)-4-(y^2+4y+4)+4+4=0$$
$$4(x-1)^2-(y+2)^2=-4$$
$$(x-1)^2-\frac{(y+2)^2}{4}=-1$$

したがって，与えられた方程式は

双曲線$\boldsymbol{x^2-\dfrac{y^2}{4}=-1}$**を**$\boldsymbol{x}$**軸方向に1，**$\boldsymbol{y}$**軸方向に**$\boldsymbol{-2}$

だけ平行移動した双曲線　を表す。



$\boxed{5}$

(1)　kを定数とする。楕円$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=1$と直線$y=-x+k$の共有点の個数を調べよ。

(2)　点$(0,\ -1)$から双曲線$x^2-y^2=1$に引いた接線の方程式を求めよ。

解答

(1)　$y=-x+k$を$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=1$に代入すると

$$\frac{x^2}{3}+\frac{(-x+k)^2}{6}=1 \qquad 2x^2+(x^2-2kx+k^2)=6$$

$$3x^2-2kx+k^2-6=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

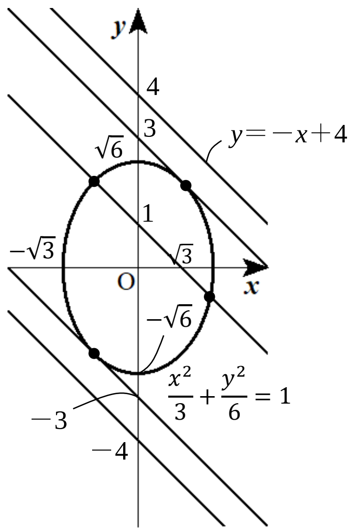
$$\frac{D}{4}=(-k)^2-3(k^2-6)=-2k^2+18=-2(k+3)(k-3)$$

よって，求める共有点の個数は

$D>0$　すなわち　**$-3<k<3$ のとき　2 個**

$D=0$　すなわち　**$k=\pm3$ のとき　1 個**

$D<0$　すなわち　**$k<-3$，$3<k$ のとき　0 個**



(2)　直線 $x=0$ は接線でないから，求める接線の方程式は $y=mx-1$ とおける。これを双曲線の方程式に代入すると

$x^2-(mx-1)^2=1$　　$x^2-(m^2x^2-2mx+1)=1$

$(1-m^2)x^2+2mx-2=0$　……①

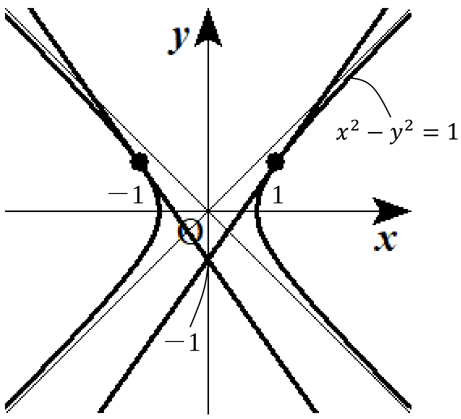
$m=\pm1$ のとき, 双曲線の漸近線と平行になるため接線にならない。

2 次方程式①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=m^2-(1-m^2)\cdot(-2)=m^2+2-2m^2=-m^2+2$$

よって，$D=0$ となるのは $m=\pm\sqrt{2}$のときであるから，

求める接線の方程式は　**$y=\sqrt{2}x-1$，$y=-\sqrt{2}x-1$**



6

次の問いに答えよ。

(1)　x＝$2t$＋1，y＝$2t^2$－1 のように媒介変数表示された曲線は，t の値が変化するときどのような図形を表すか。

(2)　θ を媒介変数として，次の曲線の媒介変数表示を求めよ。

①　$x^2+y^2=4$　　②　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　③　$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

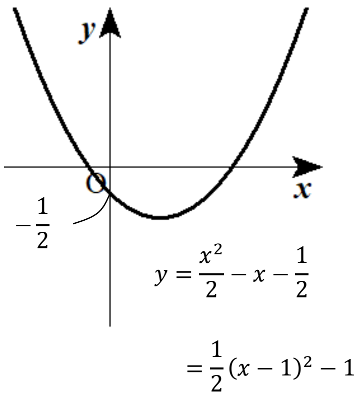
(3)　x＝$3\cos\theta$ －2，y＝$2\sin\theta$ ＋1 のように媒介変数表示された曲線は，どのような図形を表すか。

解答

(1)　$x=2t+1$ より，$t=\dfrac{x-1}{2}$ であるから，これを $y=2t^2-1$ に代入すると

$$y=2\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-1=2\cdot\frac{x^2-2x+1}{4}-1=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}$$

よって，与えられた曲線は，**放物線 $\boldsymbol{y=\dfrac{x^2}{2}-x-\dfrac{1}{2}}$** を表す。



(2)　①　与えられた曲線の方程式は，$x^2+y^2=2^2$ と変形できるから

x＝$2\cos\theta$，y＝$2\sin\theta$

②　与えられた曲線の方程式は，$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ と変形できるから

x＝$5\cos\theta$，y＝$3\sin\theta$

③　与えられた曲線の方程式は，$\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$ と変形できるから

$$\boldsymbol{x=\frac{2}{\cos\theta},\quad y=3\tan\theta}$$

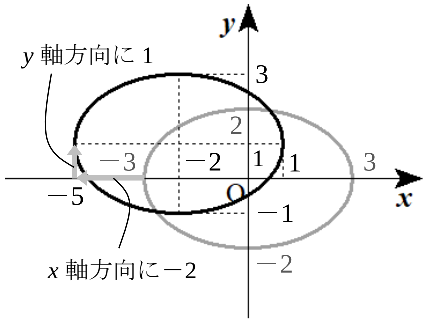
(3)　与えられた曲線は，

$x=3\cos\theta$，$y=2\sin\theta$　……①

のように媒介変数表示された曲線を

x 軸方向に -2，y 軸方向に 1

だけ平行移動した曲線である。



①は，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を表すから，与えられた曲線は

楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1}$ を $\boldsymbol{x}$ 軸方向に $\boldsymbol{-2}$，$\boldsymbol{y}$ 軸方向に $\boldsymbol{1}$ だけ平行移動したものである。

$\boxed{\text{別解}}$　$x=3\cos\theta-2$，$y=2\sin\theta+1$ から，$\cos\theta=\dfrac{x+2}{3}$，$\sin\theta=\dfrac{y-1}{2}$

これらを $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入すると　$\left(\dfrac{x+2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{y-1}{2}\right)^2=1$

よって，与えられた曲線の方程式は　$\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

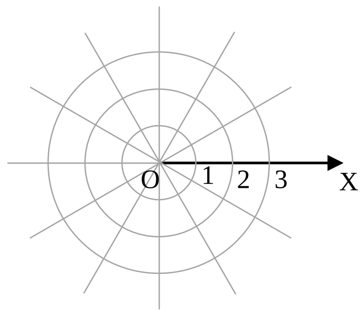
この方程式の表す図形は，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである

$\boxed{7}$

次の問いに答えよ。

(1)　極座標で表された次の点を，右の図に図示せよ。

①　$\left(1,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$　　②　$(2,\ \pi)$　　③　$\left(3,\ -\dfrac{\pi}{6}\right)$



(2)　次の極座標で表される点の直交座標を求めよ。

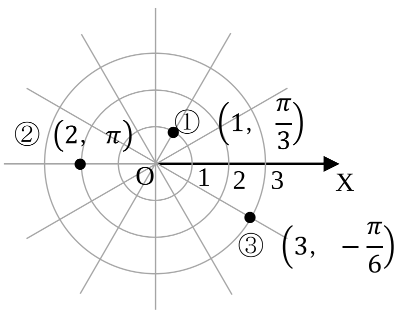
①　$\left(2,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$　　②　$\left(3,\ -\dfrac{5}{6}\pi\right)$

(3)　次の直交座標で表される点の極座標$(r,\ \theta)$を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$とする。

①　$(-1,\ 1)$　　②　$(\sqrt{3},\ 3)$　　③　$(0,\ -2)$

解答

(1)



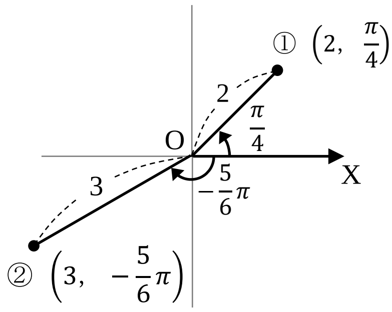
(2)　①　$x = 2\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$，$y = 2\sin\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

であるから，直交座標は　$(\boldsymbol{\sqrt{2},\ \sqrt{2}})$

②　$x = 3 \cdot \cos\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

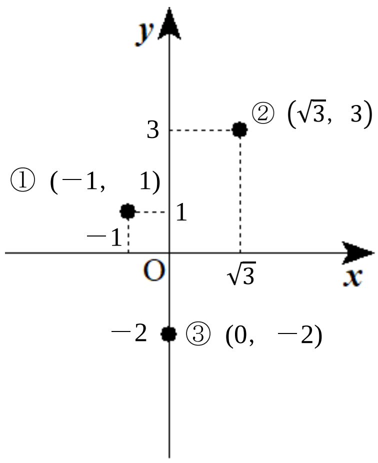
$y = 3 \cdot \sin\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right) = -\dfrac{3}{2}$

であるから，直交座標は　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)}$



(3)　①　$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$,　　$\cos\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$で，$0\leqq\theta<2\pi$であるから　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

よって，極座標は　$\left(\boldsymbol{\sqrt{2},\ \dfrac{3}{4}\pi}\right)$



②　$r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+3^2}=2\sqrt{3}$,

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

で，$0\leqq\theta<2\pi$であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

よって，極座標は　$\left(\boldsymbol{2\sqrt{3},\ \dfrac{\pi}{3}}\right)$

③　$r=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$，$\cos\theta=\dfrac{0}{2}=0$，$\sin\theta=\dfrac{-2}{2}=-1$ で，

$0\leqq\theta<2\pi$であるから　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$　　よって，極座標は　$\left(\boldsymbol{2,\ \dfrac{3}{2}\pi}\right)$

$\boxed{8}$

次の問いに答えよ。

(1)　次の極方程式を求めよ。

①　中心が極 O，半径が 3 の円　　　②　中心の極座標が(2，0)，半径が 2 の円

③　極 O を通り，始線から測った角が$\dfrac{2}{3}\pi$である直線

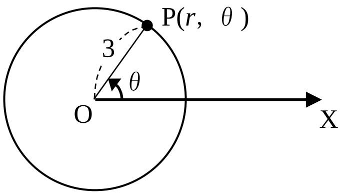
④　極座標が$\left(1,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$である点 A を通り，線分 OA に垂直な直線

(2)　直交座標の方程式$(x-2)^2+y^2=4$を，極方程式で表せ。

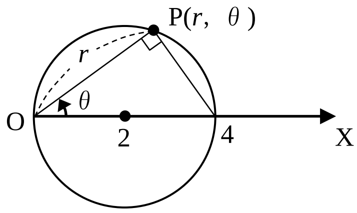
(3)　極方程式 $r=4\sin\theta$ を，直交座標の方程式で表せ。

解答

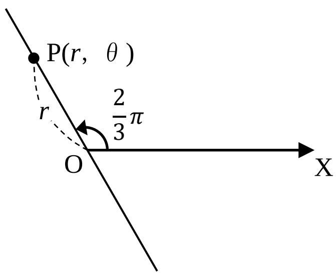
(1)　①　$\boldsymbol{r=3}$



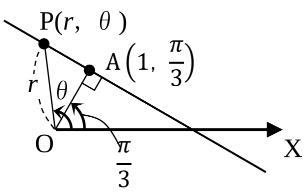
②　$\boldsymbol{r=4\cos\theta}$



③　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{2}{3}\pi}$



④　$\boldsymbol{r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=1}$



(2)　$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ を代入すると

$$(r\cos\theta - 2)^2 + (r\sin\theta)^2 = 4 \qquad r^2\cos^2\theta - 4r\cos\theta + 4 + r^2\sin^2\theta = 4 \qquad r(r - 4\cos\theta) = 0$$

よって，$r = 0$ または $r = 4\cos\theta$　　$r = 4\cos\theta$ は $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $r = 0$ となるから，$r = 0$ の場合を含む。したがって，求める極方程式は　$\boldsymbol{r = 4\cos\theta}$

(3)　与えられた極方程式 $r = 4\sin\theta$ の両辺に r を掛けると　$r^2 = 4r\sin\theta$

$r^2 = x^2 + y^2$，$r\sin\theta = y$ を代入すると　$x^2 + y^2 = 4y$

変形すると　$x^2 + (y^2 - 4y + 4) - 4 = 0$ より　$x^2 + (y-2)^2 = 4$

よって，求める直交座標の方程式は，円 $\boldsymbol{x^2 + (y-2)^2 = 4}$ である。