

式の展開と因数分解

1

- (1) 次の整式を [] 内の文字について降べきの順に整理し, [] 内の文字に着目したときの次数と定数項を答えよ。
- ① $2a^2 + 3 + a^4 + 2a^4 + 3a^2 + a^6$ [a]
 - ② $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ [z]
- (2) $A = x^2 + 2ax + 2$, $B = a^2 - 3ax + 1$ のとき, 次の計算をせよ。
- ① $3A + 2B$
 - ② $A - \{2B + 3(A - 2B)\}$

解答

- (1) ① $2a^2 + 3 + a^4 + 2a^4 + 3a^2 + a^6 = a^6 + 3a^4 + 5a^2 + 3$
次数は 6, 定数項は 3
② $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = z^2 + (x+y)z + x^2 + y^2 + xy$
次数は 2, 定数項は $x^2 + y^2 + xy$
- (2) ① $3A + 2B = 3(x^2 + 2ax + 2) + 2(a^2 - 3ax + 1) = 3x^2 + 6ax + 6 + 2a^2 - 6ax + 2$
 $= 3x^2 + 2a^2 + 8$
- ② $A - \{2B + 3(A - 2B)\} = A - (2B + 3A - 6B) = A - 2B - 3A + 6B = -2A + 4B$
 $= -2(x^2 + 2ax + 2) + 4(a^2 - 3ax + 1) = -2x^2 - 4ax - 4 + 4a^2 - 12ax + 4$
 $= -2x^2 - 16ax + 4a^2$

2

- (1) 次の式を計算せよ。
- ① $(-2a^2b)^3$
 - ② $x^2y^3 \times (-xy^2z)^2$
- (2) 次の式を展開せよ。
- ① $(x^2 - x - 1)(2x + 1)$
 - ② $(a + b + 1)(2a - 3b - 1)$

解答

- (1) ① $(-2a^2b)^3 = (-2)^3 a^{2 \times 3} b^3 = -8a^6b^3$
② $x^2y^3 \times (-xy^2z)^2 = x^2y^3 \times (-1)^2 x^2y^{2 \times 2} z^2 = 1 \times x^{2+2} \times y^{3+4} \times z^2 = x^4y^7z^2$
- (2) ① $(x^2 - x - 1)(2x + 1) = (x^2 - x - 1) \cdot 2x + (x^2 - x - 1) \cdot 1 = 2x^3 - 2x^2 - 2x + x^2 - x - 1$
 $= 2x^3 - x^2 - 3x - 1$
- ② $(a + b + 1)(2a - 3b - 1) = a(2a - 3b - 1) + b(2a - 3b - 1) + 1 \cdot (2a - 3b - 1)$
 $= 2a^2 - 3ab - a + 2ab - 3b^2 - b + 2a - 3b - 1$
 $= 2a^2 - ab - 3b^2 + a - 4b - 1$

3 次の式を展開せよ。

- | | |
|------------------|----------------------|
| (1) $(a-2b)^2$ | (2) $(3+2x)(3-2x)$ |
| (3) $(a-5)(a+7)$ | (4) $(5x-4y)(3x+2y)$ |

解答

- (1) $(a-2b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 2b + (2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$
- (2) $(3+2x)(3-2x) = 3^2 - (2x)^2 = 9 - 4x^2$
- (3) $(a-5)(a+7) = a^2 + (-5+7)a - 5 \cdot 7 = a^2 + 2a - 35$
- (4) $(5x-4y)(3x+2y) = (5 \cdot 3)x^2 + \{5 \cdot 2y + (-4y) \cdot 3\}x - 4y \cdot 2y = 15x^2 - 2xy - 8y^2$

4 次の式を展開せよ。

- | | |
|-------------------|----------------------------|
| (1) $(x^2+x+1)^2$ | (2) $(4a^2+1)(2a+1)(2a-1)$ |
|-------------------|----------------------------|

解答

$$(1) x^2+x=A \text{ とおくと } (x^2+x+1)^2=(A+1)^2=A^2+2A+1=(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1 \\ =x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$$

別解 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ において、 $a=x^2$, $b=x$, $c=1$ を代入すると
 $(x^2+x+1)^2=(x^2)^2+x^2+1^2+2 \cdot x^2 \cdot x+2 \cdot x \cdot 1+2 \cdot 1 \cdot x^2$
 $=x^4+x^2+1+2x^3+2x+2x^2=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

$$(2) (4a^2+1)(2a+1)(2a-1)=(4a^2+1)\{(2a)^2-1^2\}=(4a^2+1)(4a^2-1)=(4a^2)^2-1^2 \\ =16a^4-1$$

5 次の式を因数分解せよ。

- | | | |
|-------------------|---------------------|-------------------------|
| (1) $3ax^2-6a^2b$ | (2) $16a^2+8a+1$ | (3) $x^2-x+\frac{1}{4}$ |
| (4) $64x^2-25y^2$ | (5) $a^2+3ab-10b^2$ | (6) $3x^2-12$ |

解答

- (1) $3ax^2-6a^2b=3a \cdot x^2 - 3a \cdot 2ab=3a(x^2-2ab)$
- (2) $16a^2+8a+1=(4a)^2+2 \cdot 4a \cdot 1+1^2=(4a+1)^2$
- (3) $x^2-x+\frac{1}{4}=x^2-2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$
- (4) $64x^2-25y^2=(8x)^2-(5y)^2=(8x+5y)(8x-5y)$
- (5) $a^2+3ab-10b^2=a^2+(5b-2b)a+5b \cdot (-2b)=(a+5b)(a-2b)$
- (6) $3x^2-12=3(x^2-4)=3(x^2-2^2)=3(x+2)(x-2)$

6 次の式を因数分解せよ。

$$(1) \quad 3x^2 + 5x - 2$$

$$(3) \quad 6x^2 + xy - 2y^2$$

$$(2) \quad 4a^2 + 8a + 3$$

$$(4) \quad 8a^2 - 14ab - 15b^2$$

解答

$$(1) \quad 3x^2 + 5x - 2 = (x+2)(3x-1)$$

$$\begin{array}{r} 1 & & 2 & \longrightarrow & 6 \\ 3 & \cancel{\diagup} & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline & & & & 5 \end{array}$$

$$(2) \quad 4a^2 + 8a + 3 = (2a+1)(2a+3)$$

$$\begin{array}{r} 2 & & 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & \cancel{\diagup} & 3 & \longrightarrow & 6 \\ \hline & & & & 8 \end{array}$$

$$(3) \quad 6x^2 + xy - 2y^2 = (2x-y)(3x+2y)$$

$$\begin{array}{r} 2 & & -y & \longrightarrow & -3y \\ 3 & \cancel{\diagup} & 2y & \longrightarrow & 4y \\ \hline & & & & y \end{array}$$

$$(4) \quad 8a^2 - 14ab - 15b^2 = (2a-5b)(4a+3b)$$

$$\begin{array}{r} 2 & & -5b & \longrightarrow & -20b \\ 4 & \cancel{\diagup} & 3b & \longrightarrow & 6b \\ \hline & & & & -14b \end{array}$$

7 次の式を因数分解せよ。

$$(1) \quad (x+y+1)(x+y+2)-6$$

$$(2) \quad 4a^2 - 9b^2 + 6bc - c^2$$

解答

$$(1) \quad x+y=A \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} (x+y+1)(x+y+2)-6 &= (A+1)(A+2)-6 = A^2 + 3A + 2 - 6 = A^2 + 3A - 4 \\ &= (A+4)(A-1) \\ &= (x+y+4)(x+y-1) \end{aligned}$$

$$(2) \quad 4a^2 - 9b^2 + 6bc - c^2 = 4a^2 - (9b^2 - 6bc + c^2) = 4a^2 - \{(3b)^2 - 2 \cdot 3b \cdot c + c^2\} = 4a^2 - (3b-c)^2 \text{ から}$$

$$3b-c=A \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} 4a^2 - 9b^2 + 6bc - c^2 &= 4a^2 - A^2 = (2a)^2 - A^2 = (2a+A)(2a-A) \\ &= \{2a+(3b-c)\}\{2a-(3b-c)\} \\ &= (2a+3b-c)(2a-3b+c) \end{aligned}$$

8 次の式を因数分解せよ。

$$(1) \ x^2 - 2xy + 3x - 4y + 2$$

$$(2) \ 6ab + 4a - 3b - 2$$

$$(3) \ 2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 2y$$

$$(4) \ 2x^2 + 7xy + 3y^2 - 5x - 10y + 3$$

解答

$$(1) \ x^2 - 2xy + 3x - 4y + 2 = (-2x - 4)y + x^2 + 3x + 2 = -2(x + 2)y + (x + 1)(x + 2) \\ = (x + 2)\{-2y + (x + 1)\} = (x + 2)(x - 2y + 1)$$

$$(2) \ 6ab + 4a - 3b - 2 = 2a(3b + 2) - (3b + 2) \\ = (3b + 2)(2a - 1)$$

別解 $6ab + 4a - 3b - 2 = 3b(2a - 1) + 2(2a - 1) = (2a - 1)(3b + 2)$

$$(3) \ 2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 2y = 2x^2 + (3y + 1)x - 2y^2 + 2y \\ = 2x^2 + (3y + 1)x - 2y(y - 1) \\ = (x + 2y)\{2x - (y - 1)\} \\ = (x + 2y)(2x - y + 1)$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2y \longrightarrow 4y \\ 2 \quad -(y-1) \longrightarrow -y+1 \\ \hline 3y+1 \end{array}$$

〈注意〉 y について降べきの順に整理しても、同様に因数分解できる。

別解 まず2次の項を因数分解する。

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 2y = (x + 2y)(2x - y) + x + 2y \\ = (x + 2y)(2x - y + 1)$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2y \longrightarrow 4y \\ 2 \quad -y \longrightarrow -y \\ \hline 3y \end{array}$$

$$(4) \ 2x^2 + 7xy + 3y^2 - 5x - 10y + 3 = 2x^2 + (7y - 5)x + 3y^2 - 10y + 3 \\ = 2x^2 + (7y - 5)x + (y - 3)(3y - 1)$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -3 \longrightarrow -9 \\ 3 \quad -1 \longrightarrow -1 \\ \hline -10 \end{array}$$

$$= \{x + (3y - 1)\}\{2x + (y - 3)\} \\ = (x + 3y - 1)(2x + y - 3)$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad (3y-1) \longrightarrow 6y-2 \\ 2 \quad (y-3) \longrightarrow y-3 \\ \hline 7y-5 \end{array}$$

〈注意〉 y について降べきの順に整理しても、同様に因数分解できる。

別解 まず2次の項を因数分解する。

$$2x^2 + 7xy + 3y^2 - 5x - 10y + 3 = (x + 3y)(2x + y) - 5x - 10y + 3$$

このとき、次のような t の2次式

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3y \longrightarrow 6y \\ 2 \quad y \longrightarrow y \\ \hline 7y \end{array}$$

$$(x + 3y)(2x + y)t^2 + (-5x - 10y)t + 3$$

を考え、たすき掛けを利用して因数分解をすると

$$(x + 3y)(2x + y)t^2 + (-5x - 10y)t + 3 \\ = \{(x + 3y)t - 1\}\{(2x + y)t - 3\}$$

$$\begin{array}{r} (x+3y) \quad -1 \longrightarrow -2x-y \\ (2x+y) \quad -3 \longrightarrow -3x-9y \\ \hline -5x-10y \end{array}$$

ここで、 $t = 1$ を代入すると

$$(x + 3y)(2x + y) - 5x - 10y + 3 = (x + 3y - 1)(2x + y - 3)$$

研究 1

(1) 次の式を展開せよ。

(1) $(3x-1)^3$

(2) $(4a+3b)(16a^2-12ab+9b^2)$

(2) 次の式を因数分解せよ。

(1) $1-a^3$

(2) $1000x^3+y^3$

解答

(1) (1) $(3x-1)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3x \cdot 1^2 - 1^3 = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$

(2) (2) $(4a+3b)(16a^2-12ab+9b^2) = (4a+3b)\{(4a)^2 - 4a \cdot 3b + (3b)^2\} = (4a)^3 + (3b)^3 = 64a^3 + 27b^3$

(2) (1) $1-a^3 = 1^3 - a^3 = (1-a)(1^2 + 1 \cdot a + a^2) = (1-a)(1+a+a^2)$

(2) (2) $1000x^3+y^3 = (10x)^3+y^3 = (10x+y)\{(10x)^2 - 10x \cdot y + y^2\} = (10x+y)(100x^2 - 10xy + y^2)$

研究 2

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4 - 1$

(2) $x^4 - 2x^2 - 8$

(3) $x^4 + 4$

(4) $x^4 - 3x^2 + 1$

解答

(1) $x^2 = X$ とおくと $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1 = X^2 - 1 = (X+1)(X-1) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x+1)(x-1)$

(2) $x^2 = X$ とおくと $x^4 - 2x^2 - 8 = (x^2)^2 - 2x^2 - 8 = X^2 - 2X - 8 = (X+2)(X-4) = (x^2 + 2)(x^2 - 4) = (x^2 + 2)(x+2)(x-2)$

(3) $(x^2 + 2)^2 = x^4 + 4x^2 + 4$ から

$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$

と変形できる。このことから

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = \{(x^2 + 2) + 2x\}\{(x^2 + 2) - 2x\} \\ &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

(4) $(x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$ から

$x^4 - 3x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 - 1)^2 - x^2$

と変形できる。このことから

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 1 &= (x^2 - 1)^2 - x^2 = \{(x^2 - 1) + x\}\{(x^2 - 1) - x\} \\ &= (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1) \end{aligned}$$