積分法

$\boxed{1}$

(1)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,dx$ を求めよ。

(2)　次の不定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int (\cos x - \sin x)\,dx$　　②　$\displaystyle\int \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1)}{\cos^2 x}\,dx$

(3)　不定積分 $\displaystyle\int (2^x + e^x)\,dx$ を求めよ。

解答

C は積分定数とする。

(1)

$$\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,dx = \int \frac{x^4+2x^2+1}{x^3}\,dx = \int \left(x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)dx = \int (x^1 + 2x^{-1} + x^{-3})\,dx$$

$$= \frac{1}{1+1}x^{1+1} + 2\log|x| + \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C = \frac{1}{2}x^2 + 2\log|x| - \frac{1}{2}x^{-2} + C$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 + 2\log|x| - \frac{1}{2x^2} + C}$$

(2)　①

$$\int (\cos x - \sin x)\,dx = \boldsymbol{\sin x + \cos x + C}$$

②

$$\int \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1)}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \boldsymbol{\sin x - \tan x + C}$$

(3)

$$\int (2^x + e^x)\,dx = \boldsymbol{\frac{2^x}{\log 2} + e^x + C}$$

$\boxed{2}$
次の不定積分を求めよ。

(1)　① $\displaystyle\int \sqrt[4]{2x-3}\,dx$　② $\displaystyle\int \cos(5x+1)\,dx$

(2)　① $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-2)^2}\,dx$　② $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}\,dx$

(3)　① $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-3)^2}\,dx$　② $\displaystyle\int \cos^2 x\sin x\,dx$　③ $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3+2}}\,dx$

(4)　① $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+2}\,dx$　② $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}\,dx$

解答

C は積分定数とする。

(1)　①　$2x-3=t$とおくと，$dx=\dfrac{1}{2}dt$より

$$\int \sqrt[4]{2x-3}\,dx=\int \sqrt[4]{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{4}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}+1}t^{\frac{1}{4}+1}+C=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{4}}+C=\boldsymbol{\frac{2}{5}(2x-3)\sqrt[4]{2x-3}+C}$$

②　$5x+1=t$とおくと，$dx=\dfrac{1}{5}dt$より

$$\int \cos(5x+1)\,dx=\int \cos t\cdot\frac{1}{5}dt=\frac{1}{5}\int \cos t\,dt=\frac{1}{5}\sin t+C=\boldsymbol{\frac{1}{5}\sin(5x+1)+C}$$

(2)　①　$x-2=t$とおくと，$x=t+2$，$dx=dt$より

$$\int \frac{x^2}{(x-2)^2}dx=\int \frac{(t+2)^2}{t^2}dt=\int\left(1+\frac{4}{t}+\frac{4}{t^2}\right)dt=t+4\log|t|+\frac{4}{-2+1}t^{-2+1}+C$$

$$=t+4\log|t|-\frac{4}{t}+C=x-2+4\log|x-2|-\frac{4}{x-2}+C$$

$$=\boldsymbol{x+4\log|x-2|-\frac{4}{x-2}+C}$$

②　$x+2=t$とおくと，$x=t-2$，$dx=dt$より

$$\int x\sqrt{x+2}\,dx=\int (t-2)\sqrt{t}\,dt=\int\left(t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}t^{\frac{3}{2}+1}-2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{15}t^{\frac{3}{2}}(3t-10)+C=\boldsymbol{\frac{2}{15}(x+2)(3x-4)\sqrt{x+2}+C}$$

別解　$\sqrt{x+2}=t$とおくと$x+2=t^2$から，$x=t^2-2$，$dx=2tdt$より

$$\int x\sqrt{x+2}\,dx=\int (t^2-2)\cdot t\cdot 2t\,dt=\int (2t^4-4t^2)\,dt=\frac{2}{5}t^5-\frac{4}{3}t^3+C$$

$$=\frac{2}{15}t^3(3t^2-10)+C=\frac{2}{15}(x+2)(3x-4)\sqrt{x+2}+C$$

(3)　①　$e^x - 3 = t$とおくと，$e^x dx = dt$より

$$\int \frac{e^x}{(e^x-3)^2}dx = \int \frac{1}{(e^x-3)^2}\cdot e^x\,dx = \int \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{-2+1}t^{-2+1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\boldsymbol{\frac{1}{e^x-3} + C}$$

②　$\cos x = t$とおくと，$-\sin x\,dx = dt$より

$$\int \cos^2 x \sin x\,dx = -\int \cos^2 x\cdot(-\sin x)\,dx = -\int t^2\,dt = -\frac{1}{3}t^3 + C = -\boldsymbol{\frac{1}{3}\cos^3 x + C}$$

③　$x^3 + 2 = t$とおくと，$3x^2 dx = dt$より

$$\int \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3+2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}dt = \int t^{-\frac{1}{3}}dt = \frac{1}{-\frac{1}{3}+1}t^{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2} + C = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^3+2)^2} + C}$$

〈注意〉$\sqrt[3]{x^3+2} = t$とおいてもよい。

(4)　①　$x^3 + 2 = t$とおくと，$3x^2 dx = dt$より

$$\int \frac{3x^2}{x^3+2}dx = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C = \boldsymbol{\log\left|x^3+2\right| + C}$$

②　$\dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$であり，$\sin x = t$とおくと，$\cos x\,dx = dt$より

$$\int \frac{1}{\tan x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C = \boldsymbol{\log|\sin x| + C}$$

$\boxed{3}$

(1)　次の不定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int x\cos x\,dx$　　　　②　$\displaystyle\int x^2\log x\,dx$

(2)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2}{e^x}dx$ を求めよ。

解答

C は積分定数とする。

(1)　①　$\displaystyle\int x\cos x\,dx=\int x\cdot(\sin x)'\,dx=x\sin x-\int(x)'\cdot\sin x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$

$$=\boldsymbol{x\sin x+\cos x+C}$$

②　$\displaystyle\int x^2\log x\,dx=\int\log x\cdot\left(\frac{1}{3}x^3\right)'dx=\frac{1}{3}x^3\log x-\int(\log x)'\cdot\frac{1}{3}x^3\,dx=\frac{1}{3}x^3\log x-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{3}x^3\,dx$

$$=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{3}\int x^2\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3+C}$$

(2)　$\displaystyle\int\frac{x^2}{e^x}dx=\int x^2\cdot e^{-x}\,dx=\int x^2\cdot(-e^{-x})'\,dx=-x^2e^{-x}-\int(x^2)'\cdot(-e^{-x})\,dx=-\frac{x^2}{e^x}+\int 2x\cdot e^{-x}\,dx$

$$=-\frac{x^2}{e^x}+\int 2x\cdot(-e^{-x})'\,dx=-\frac{x^2}{e^x}+\left\{-2x\cdot e^{-x}-\int(2x)'\cdot(-e^{-x})\,dx\right\}$$

$$=-\frac{x^2}{e^x}-\frac{2x}{e^x}+2\int e^{-x}\,dx=-\frac{x^2}{e^x}-\frac{2x}{e^x}-2e^{-x}+C=\boldsymbol{-\frac{x^2+2x+2}{e^x}+C}$$

$\boxed{4}$

(1)　次の不定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x-2}dx$　　②　$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}dx$

(2)　次の不定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$　　②　$\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$

③　$\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$　　④　$\displaystyle\int \cos 3x \cos x\,dx$

解答

C は積分定数とする。

(1)　①　$x^2+x=(x-2)(x+3)+6$ であるから

2	1	1	0
		2	6
	1	3	6

$$\int \frac{x^2+x}{x-2}dx=\int \frac{(x-2)(x+3)+6}{x-2}dx=\int \left(x+3+\frac{6}{x-2}\right)dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2+3x+6\log|x-2|+C}$$

②　$\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x(x+1)}$ であるから，$\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$ が恒等式となる a，b の値を求める。

$(\text{右辺})=\dfrac{a(x+1)+bx}{x(x+1)}=\dfrac{(a+b)x+a}{x^2+x}$　　よって　$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases}$

これを解いて　$a=1$，$b=-1$　　したがって　$\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

これから　$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\log|x|-\log|x+1|+C=\boldsymbol{\log\left|\frac{x}{x+1}\right|+C}$

(2)　①　$\cos 2x=1-2\sin^2 x$ であるから　$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

よって　$\displaystyle\int \sin^2 x\,dx=\int \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\boldsymbol{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C}$

②　$\cos^2 x=1-\sin^2 x$ より　$\displaystyle\int \cos^3 x\,dx=\int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

ここで，$\sin x=t$ とおくと $\cos x dx=dt$ であるから

$$\int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int (1-t^2)dt=t-\frac{1}{3}t^3+C=\boldsymbol{-\frac{1}{3}\sin^3 x+\sin x+C}$$

③　$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ であるから　$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)$

$\cos^2 2x = \dfrac{1+\cos 4x}{2}$ であるから　$\cos^4 x = \dfrac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\dfrac{1+\cos 4x}{2}\right)$

$$= \frac{1}{8}(3+4\cos 2x+\cos 4x)$$

よって　$\displaystyle\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int (3+4\cos 2x+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{8}\left(3x+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C}$$

④　三角関数の積和の公式　$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$ より

$$\int \cos 3x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \{\cos(3x+x)+\cos(3x-x)\}\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x+\cos 2x)\,dx$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+C}$$

5

(1)　次の定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int_2^4 x^3\,dx$　　②　$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$　　③　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$　　④　$\displaystyle\int_{-2}^0 e^x\,dx$

(2)　次の定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int_{-1}^2 \sqrt{|x|}\,dx$　　②　$\displaystyle\int_2^3 \frac{x+3}{x^2-1}dx$　　③　$\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$　　④　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\cos 3x\,dx$

解答

(1)　①　$\displaystyle\int_2^4 x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_2^4=\frac{1}{4}\cdot 4^4-\frac{1}{4}\cdot 2^4=\mathbf{60}$

②　$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^2=\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^2=2\cdot 2^{\frac{1}{2}}-2\cdot 1^{\frac{1}{2}}=\mathbf{2\sqrt{2}-2}$

③　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx=\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-0=\mathbf{1}$

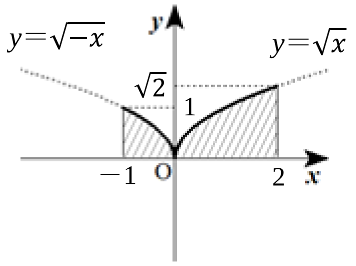
④　$\displaystyle\int_{-2}^0 e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_{-2}^0=e^0-e^{-2}=\mathbf{1-\frac{1}{e^2}}$

(2)　①　$-1\leqq x\leqq 0$ のとき，$x\leqq 0$ であるから

$\sqrt{|x|}=\sqrt{-x}$

$0\leqq x\leqq 2$ のとき，$x\geqq 0$ であるから

$\sqrt{|x|}=\sqrt{x}$



よって　$\displaystyle\int_{-1}^2 \sqrt{|x|}\,dx=\int_{-1}^0 \sqrt{-x}\,dx+\int_0^2 \sqrt{x}\,dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^0 (-x)^{\frac{1}{2}}dx+\int_0^2 x^{\frac{1}{2}}dx$

$\displaystyle=\left[(-1)\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(-x)^{\frac{1}{2}+1}\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2=-\left[\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^0+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$

$\displaystyle=-0+\frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}-0=-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{2}=\mathbf{\frac{2+4\sqrt{2}}{3}}$

② $\dfrac{x+3}{x^2-1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1}$ が恒等式となるa，bの値を求める。

$$(\text{右辺})=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}=\frac{a(x-1)+b(x+1)}{x^2-1}=\frac{(a+b)x-a+b}{x^2-1}$$

よって $\begin{cases} a+b=1 \\ -a+b=3 \end{cases}$ これを解いて $a=-1$，$b=2$

したがって $\dfrac{x+3}{x^2-1}=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

これから $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+3}{x^2-1}dx=\int_2^3\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\Big[2\log|x-1|\Big]_2^3-\Big[\log|x+1|\Big]_2^3$

$$=2\log 2-0-(\log 4-\log 3)=\mathbf{\log 3}$$

③ $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\,dx=\int_0^\pi\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\Big[x\Big]_0^\pi+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi$

$$=\frac{1}{2}(\pi-0)+\frac{1}{2}(0-0)=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

cos2x＝2cos²x−1 より $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

④ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 7x+\sin x)\,dx$

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}\cos 7x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{1}{14}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)=-\frac{\sqrt{2}}{28}+\frac{1}{14}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{4-2\sqrt{2}}{7}}$$

6

(1)　次の定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int_{-3}^{-2} x(x+3)^4\,dx$　　②　$\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$

(2)　次の定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$　　②　$\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

(3)　定積分$\displaystyle\int_{0}^{3\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+9}\,dx$　を求めよ。

(4)　次の定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos x\,dx$　　②　$\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2(x-1)^3\,dx$

(5)　次の定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int_{1}^{e} \log x\,dx$　　②　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos x\,dx$

解答

(1)　①　$x+3=t$ とおくと　$x=t-3$，$dx=dt$

また，x と t の対応は右のようになる。

x	$-3 \longrightarrow -2$
t	$0 \longrightarrow 1$

よって　$\displaystyle\int_{-3}^{-2} x(x+3)^4\,dx = \int_{0}^{1}(t-3)t^4\,dt = \int_{0}^{1}(t^5-3t^4)\,dt$

$$= \left[\frac{1}{5+1}t^{5+1} - 3\cdot\frac{1}{4+1}t^{4+1}\right]_0^1 = \left[\frac{1}{6}t^6 - \frac{3}{5}t^5\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{6}-\frac{3}{5}\right) - (0-0) = -\mathbf{\frac{13}{30}}$$

②　$x+2=t$ とおくと　$x=t-2$，$dx=dt$

また，x と t の対応は右のようになる。

x	$-1 \rightarrow 2$
t	$1 \rightarrow 4$

よって　$\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx = \int_{1}^{4}\frac{t-2}{\sqrt{t}}\,dt = \int_{1}^{4}\left(t^{\frac{1}{2}} - 2t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$

$$= \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1} - 2\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 4t^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$

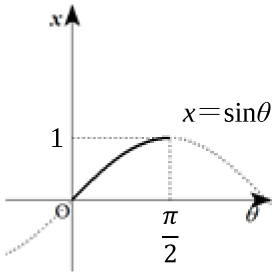
$$= \left(\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} - 4\cdot 4^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{2}{3}-4\right) = \frac{16}{3} - 8 - \frac{2}{3} + 4 = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

〈注意〉$\sqrt{x+2}=t$とおいてもよい。

(2)　①　$x=\sin\theta$ とおくと　$dx=\cos\theta d\theta$

また，x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$



$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\theta \geqq 0$ であるから

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=|\cos\theta|=\cos\theta$

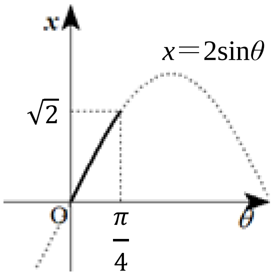
よって　$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-\frac{1}{2}(0+0)=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

②　$x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta d\theta$

また，x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \sqrt{2}$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$



$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\cos\theta \geqq 0$ であるから

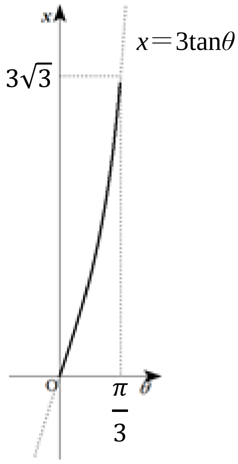
$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2\theta}=2\sqrt{1-\sin^2\theta}=2|\cos\theta|=2\cos\theta$

よって　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

(3)　$x=3\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{3}{\cos^2\theta}d\theta$

また，x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 3\sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{3}$



$x^2+9=9\tan^2\theta+9=\dfrac{9}{\cos^2\theta}$ であるから

$$\int_0^{3\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+9}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\frac{9}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{1}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{9}}$$

(4)　①　$f(x)=x^3\cos x$ は，$f(-x)=(-x)^3\cdot\cos(-x)=-x^3\cos x=-f(x)$ であるから，奇関数である。

よって　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\cos x\,dx=\boldsymbol{0}$

②　$x^2(x-1)^3=x^2(x^3-3x^2+3x-1)=x^5-3x^4+3x^3-x^2$ であり，x^5，$3x^3$ は奇関数，$-3x^4$，$-x^2$ は偶関数である。

よって　$\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2(x-1)^3\,dx=\int_{-1}^{1}(x^5-3x^4+3x^3-x^2)\,dx$

$$=\int_{-1}^{1}x^5\,dx-3\int_{-1}^{1}x^4\,dx+3\int_{-1}^{1}x^3\,dx-\int_{-1}^{1}x^2\,dx$$

$$=0-6\int_0^1 x^4\,dx+0-2\int_0^1 x^2\,dx=-6\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1-2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=-\frac{6}{5}-\frac{2}{3}=-\boldsymbol{\frac{28}{15}}$$

(5)　①　$\displaystyle\int_1^e \log x\,dx = \int_1^e \log x \cdot (x)'\,dx = \Big[x\log x\Big]_1^e - \int_1^e (\log x)' \cdot x dx = e - 0 - \int_1^e dx$

$$= e - \Big[x\Big]_1^e = e - (e - 1) = \mathbf{1}$$

②　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot (\sin x)'\,dx = \Big[x^2 \sin x\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (x^2)' \cdot \sin x\,dx$

$$= 0 - 2\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x\,dx = -2\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot (-\cos x)'\,dx$$

$$= 2\left\{\Big[x\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (x)' \cdot \cos x\,dx\right\} = 2\left\{(-\pi - \pi) - \Big[\sin x\Big]_{-\pi}^{\pi}\right\}$$

$$= -4\pi - 0 = \boldsymbol{-4\pi}$$

〈注意〉$(-x)^2 \cdot \cos(-x) = x^2 \cos x$ より，$x^2 \cos x$ は偶関数であるから，

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\,dx = 2\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx$としてもよい。

$\boxed{7}$

(1)　次の関数を x で微分せよ。

①　$y=\int_0^x \sin t\log(t^2+1)\,dt$　　　②　$y=\int_{\frac{\pi}{2}}^x (x-t)\cos t\,dt$

(2)　等式 $f(x)=e^x+\int_0^1 t\,f(t)\,dt$ を満たす関数$f(x)$を求めよ。

解答

(1)　①　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin t\log(t^2+1)\,dt=\boldsymbol{\sin x\log(x^2+1)}$

②　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\int_{\frac{\pi}{2}}^x (x-t)\cos t\,dt=\dfrac{d}{dx}\int_{\frac{\pi}{2}}^x x\cos t\,dt-\dfrac{d}{dx}\int_{\frac{\pi}{2}}^x t\cos t\,dt=\dfrac{d}{dx}\left(x\int_{\frac{\pi}{2}}^x \cos t\,dt\right)-x\cos x$

$$=(x)'\int_{\frac{\pi}{2}}^x \cos t\,dt+x\cdot\frac{d}{dx}\int_{\frac{\pi}{2}}^x \cos t\,dt-x\cos x=\Big[\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^x+x\cdot\cos x-x\cos x=\boldsymbol{\sin x-1}$$

(2)　$\int_0^1 t\,f(t)\,dt$ は定数であるから，$\int_0^1 t\,f(t)\,dt=k$とおく。このとき，関数$f(x)$は

$f(x)=e^x+k$ と表せる。ここで，$f(t)=e^t+k$ であるから $\int_0^1 t\,f(t)\,dt=k$ の左辺に

代入すると　$\int_0^1 t\,f(t)\,dt=\int_0^1 t(e^t+k)\,dt=\int_0^1 te^t\,dt+k\int_0^1 t\,dt$

$$=\int_0^1 t(e^t)'\,dt+k\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\Big[te^t\Big]_0^1-\int_0^1 (t)'e^t\,dt+k\left(\frac{1}{2}-0\right)$$

$$=e-0-\Big[e^t\Big]_0^1+\frac{1}{2}k=e-(e-1)+\frac{1}{2}k=1+\frac{1}{2}k$$

よって　$1+\dfrac{1}{2}k=k$　　　これを解いて　$k=2$　　　したがって　$\boldsymbol{f(x)=e^x+2}$

$\boxed{8}$

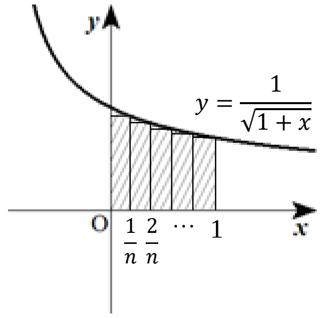
次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 1}{n^2+1^2}+\frac{2\cdot 2}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{2\cdot n}{n^2+n^2}\right)$

解答

(1) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$$



ここで，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ とおくと，

求める極限値は右の図の面積と見なせるので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=\left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(1+x)^{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=\left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1=\mathbf{2\sqrt{2}-2}$$

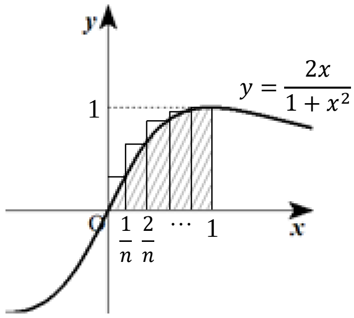
(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 1}{n^2+1^2}+\frac{2\cdot 2}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{2\cdot n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n+\frac{k^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\cdot\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

ここで，$f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ とおくと，

求める極限値は右の図の面積と見なせるので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx$$

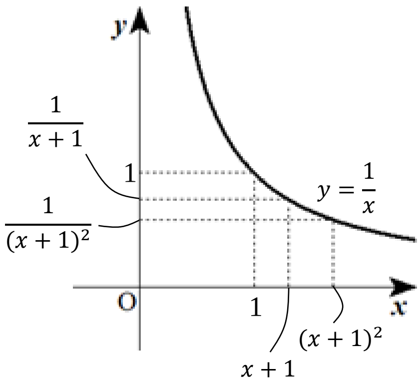
$$=\left[\log|1+x^2|\right]_0^1=\mathbf{\log 2}$$



$\boxed{9}$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$x+1 \leqq (x+1)^2$を示せ。また，このことを利用して，$\dfrac{1}{2} < \log 2$ を示せ。

証明



$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$0 \leqq x$ の両辺に 1 を加えると　$1 \leqq x+1$

よって，$1 \leqq x+1$ の両辺に $x+1$ を掛けると　$x+1 \leqq (x+1)^2$

等号が成り立つのは $x=0$ のときである。

このことから　$\dfrac{1}{x+1} \geqq \dfrac{1}{(x+1)^2}$

よって　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx \geqq \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

ここで，$\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ となるのは$x=0$ のときに限るので

つねに$\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ ではない。したがって　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx > \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

$\left[\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx\text{の値を求める}\right]$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \Big[\log|x+1|\Big]_0^1 = \log 2$$

$\left[\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx\text{の値を求める}\right]$

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \left[\frac{1}{-2+1}(x+1)^{-2+1}\right]_0^1 = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}-(-1) = \frac{1}{2}$$

以上から　$\log 2 > \dfrac{1}{2}$　　すなわち　$\dfrac{1}{2} < \log 2$

１０

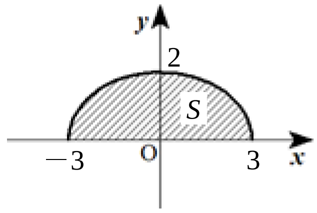
(1)　2 曲線$y=\sqrt{2-x^2}$と$y=x^2$で囲まれた図形の面積Sを求めよ。

(2)　曲線$x=\sqrt{y}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$と$y$軸，および 2 直線$y=1$，$y=4$ で囲まれた図形の面積Sを求めよ。

(3)　媒介変数 θ を用いて

$$x=3\cos\theta,\quad y=2\sin\theta\quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

で表される曲線と x 軸で囲まれた 図形の面積 S を求めよ。



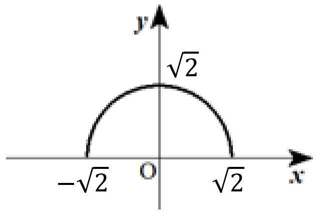
解答

(1)　曲線$y=\sqrt{2-x^2}$の定義域は　$2-x^2\geqq 0$　　すなわち　$-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$

値域は $y\geqq 0$ である。

$y=\sqrt{2-x^2}$の両辺を 2 乗して整理すると，

$x^2+y^2=2$ であるから，曲線$y=\sqrt{2-x^2}$の概形は右のようになる。

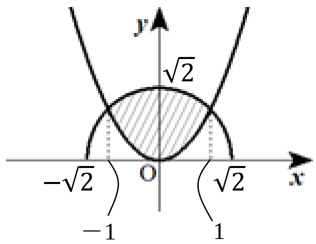


また，2 曲線の交点の x 座標は

$$\sqrt{2-x^2}=x^2\qquad 2-x^2=x^4\qquad x^4+x^2-2=0$$

$$(x^2+2)(x^2-1)=0\qquad (x^2+2)(x-1)(x+1)=0\qquad x=-1,\ 1$$

よって，2 曲線で囲まれた図形は右の図のようになる。



$-1\leqq x\leqq 1$ のとき　$\sqrt{2-x^2}\geqq x^2$であるから，

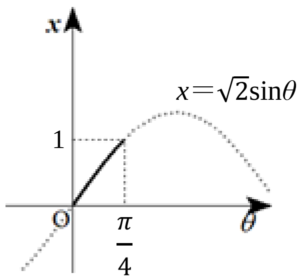
求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)dx=2\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx-2\int_0^1 x^2\,dx$$

ここで，$x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと　$dx=\sqrt{2}\cos\theta d\theta$

また，x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\ \rightarrow\ 1$
θ	$0\ \rightarrow\ \dfrac{\pi}{4}$



$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$のとき，　$\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2-2\sin^2\theta}=\sqrt{2}|\cos\theta|=\sqrt{2}\cos\theta$$

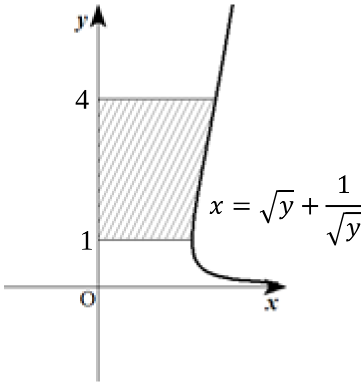
よって　$2\displaystyle\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx-2\int_0^1 x^2\,dx$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta-2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta-\frac{2}{3}=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{2}{3}$$

$$=2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)-0-\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}}$$

(2)　$1 \leqq y \leqq 4$ において，つねに $x \geqq 0$ であるから，求める面積 S は



$$S = \int_1^4 \left(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) dy = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} y^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} y^{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^4$$

$$= \left[\frac{2}{3} y\sqrt{y} + 2\sqrt{y}\right]_1^4 = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - \left(\frac{2}{3} + 2\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{20}{3}}$$

(3)　図より，求める面積Sは　$S = \int_{-3}^{3} y\, dx$ であり，

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ において，xとθの対応は右のようになる。

また，$y = 2\sin\theta$，$dx = -3\sin\theta d\theta$ であるから

x	$-3 \longrightarrow 3$
θ	$\pi \longrightarrow 0$

$$S = \int_{-3}^{3} y\, dx = \int_{\pi}^{0} 2\sin\theta \cdot (-3\sin\theta)\, d\theta$$

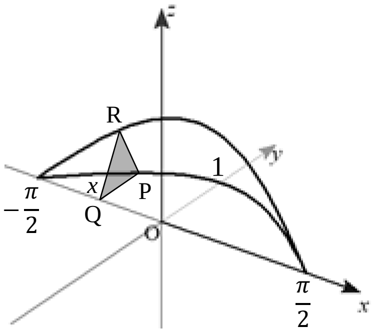
$$= 6\int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta = 6\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = 3\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= 3(\pi - 0) = \boldsymbol{3\pi}$$

１１

(1)　xy平面に曲線$y=\cos x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$があり，この曲線上の点 P($x$，cos$x$)から x 軸に垂線 PQ を引く。ここで，線分 PQ を 1 辺とする正三角形 PQR となるように，z 座標が正となる点 R を x 軸に垂直な平面上にとる。

点 Q がx軸上を点$\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$から点$\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$まで動くとき，この正三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ。



(2)　次の図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

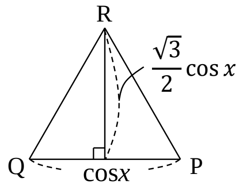
①　曲線 $y=2-e^x$ と x 軸，および y 軸で囲まれた図形

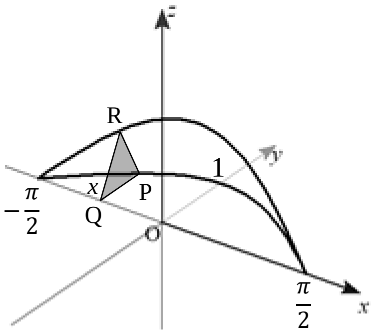
②　曲線 $y=\sqrt{x}$と直線 $y=x$ で囲まれた図形

解答

(1)　正三角形 PQR の面積を $S(x)$とすると

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2 x$$





よって，求める立体の体積 V は

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}S(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2 x\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

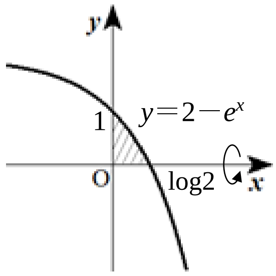
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{8}\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{8}\pi}$$

(2)　①　曲線 $y=2-e^x$ と x 軸の交点の x 座標は

$2-e^x=0$　　　$e^x=2$

両辺の自然対数をとると　$x=\log 2$

よって，求める立体の体積 V は



$$V=\pi\int_0^{\log 2}y^2\,dx=\pi\int_0^{\log 2}(2-e^x)^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\log 2}(4-4e^x+e^{2x})\,dx$$

$$=\pi\left[4x-4e^x+\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\log 2}$$

$$=\pi\left\{\left(4\log 2-4e^{\log 2}+\frac{1}{2}e^{2\log 2}\right)-\left(0-4+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\pi\left\{\left(4\log 2-4\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2^2\right)+\frac{7}{2}\right\}=\boldsymbol{\left(4\log 2-\frac{5}{2}\right)\pi}$$

$e^{\log 2}=X$とおいて，
両辺の自然対数をとると
　　$\log 2=\log X$
よって　$X=2$

② 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ の交点の x 座標は

$\sqrt{x}=x$ 両辺を 2 乗すると $x=x^2$

$x^2-x=0$ $x(x-1)=0$

定義域は $x\geqq 0$ であるから $x=0$, 1

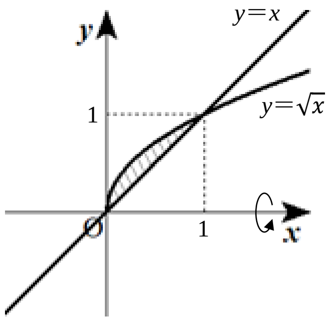
求める立体の体積 V は曲線 $y=\sqrt{x}$ と x 軸，

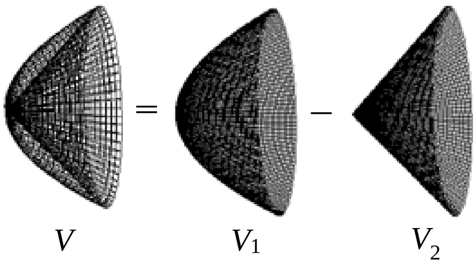
および直線 $x=1$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに

1 回転してできる回転体 V_1 から，直線 $y=x$ と x 軸，

および直線 $x=1$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに

1 回転してできる回転体 V_2 を引いたものであるから





$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2dx-\pi\int_0^1 x^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^1(x-x^2)\,dx=\pi\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{6}\pi}$$

$\boxed{１２}$

次の曲線の長さ L を求めよ。

(1)　サイクロイド $x=\theta-\sin\theta$，　$y=1-\cos\theta$　$(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$

(2)　曲線$y=\dfrac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$　$(1\leqq x\leqq 4)$

解答

(1)　$\dfrac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$，　$\dfrac{dy}{d\theta}=\sin\theta$　であるから

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{(1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}=\sqrt{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

$1-\cos\theta=2\cdot\dfrac{1-\cos\theta}{2}=2\cdot\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ であり，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$のとき $\sin\dfrac{\theta}{2}\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{2(1-\cos\theta)}=\sqrt{2\cdot 2\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}}=2\sin\frac{\theta}{2}$$

したがって　$L=\displaystyle\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\theta}{2}d\theta=2\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=-4(-1-1)=\mathbf{8}$

(2)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3}\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}(x-3)\cdot\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{2x+(x-3)}{6\sqrt{x}}=\dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}$ であるから

$$L=\int_1^4\sqrt{1+\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx=\int_1^4\sqrt{1+\frac{x^2-2x+1}{4x}}dx=\int_1^4\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{4x}}dx=\int_1^4\frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx$$

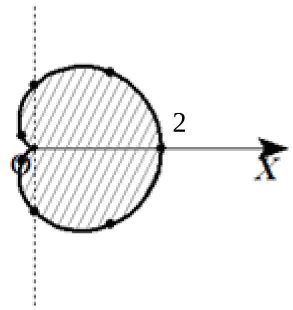
$$=\int_1^4\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^4=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2}{3}\cdot 8+2\cdot 2\right)-\left(\frac{2}{3}+2\right)\right\}=\mathbf{\frac{10}{3}}$$

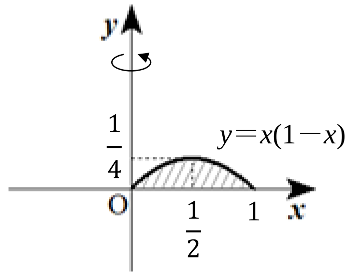
研究

(1)　極方程式$r=1+\cos\theta$　$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線上の点と極 O を結んだ線分が通過する領域の面積 S を求めよ。

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
r	2	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$



(2)　放物線 $y=x(1-x)$と x 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。



解答

(1)　$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=\frac{1}{4}\left[3\theta+4\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{4}(6\pi-0)=\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$$

(2)　$V=2\pi\int_0^1 x\cdot x(1-x)\,dx=2\pi\int_0^1(x^2-x^3)\,dx=2\pi\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$