整数の性質

1

a，b は整数とする。a，b が 5 の倍数ならば，$2a-3b$ は 5 の倍数であることを証明せよ。

証明

a，b が 5 の倍数であるから，整数 k，l を用いて，

$$a=5k,\ b=5l$$

と表すことができる。

よって　$2a-3b=2\cdot5k-3\cdot5l=10k-15l=5(2k-3l)$

$2k-3l$ は整数であるから，$2a-3b$ は 5 の倍数である。

2

次の式を満たす整数 x，y の組$(x,\ y)$をすべて求めよ。

(1)　$xy=-7$　　　　(2)　$xy+4x+y=5$

解答

(1)　x は-7 の約数となるから　$x=\pm1,\ \pm7$

したがって，求める組は

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(1,\ -7),\ (7,\ -1),\ (-1,\ 7),\ (-7,\ 1)}$$

(2)　$xy+4x+y=5$ について，

$(y+4)x+(y+4)-4=5$ から

$$(x+1)(y+4)=9$$

と変形できる。

$x+1$，$y+4$ は整数であり，

9 の約数は±1，±3，±9 であるから

$$\begin{cases}x+1=1\\y+4=9\end{cases}\quad\begin{cases}x+1=3\\y+4=3\end{cases}\quad\begin{cases}x+1=9\\y+4=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+1=-1\\y+4=-9\end{cases}\quad\begin{cases}x+1=-3\\y+4=-3\end{cases}\quad\begin{cases}x+1=-9\\y+4=-1\end{cases}$$

$x+1$	1	3	9	-1	-3	-9
$y+4$	9	3	1	-9	-3	-1
x	0	2	8	-2	-4	-10
y	5	-1	-3	-13	-7	-5

したがって，求める組は

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(0,\ 5),\ (2,\ -1),\ (8,\ -3),\ (-2,\ -13),\ (-4,\ -7),\ (-10,\ -5)}$$

$\boxed{3}$

7 個の自然数 1234，2345，3456，4567，5678，6789，7890 のうち，次の条件を満たすものをすべて答えよ。

(1)　2 の倍数　　(2)　3 の倍数　　(3)　4 の倍数　　(4)　5 の倍数　　(5)　9 の倍数

解答

(1)　7 個の自然数のうち，一の位の数が偶数であるものは　**1234，3456，5678，7890**

(2)　7 個の自然数のうち，各位の数の和が 3 の倍数であるものは　**3456，6789，7890**

(3)　7 個の自然数のうち，下 2 桁の数が 4 の倍数であるものは　**3456**

(4)　7 個の自然数のうち，一の位の数が 0 か 5 であるものは　**2345，7890**

(5)　7 個の自然数のうち，各位の数の和が 9 の倍数であるものは　**3456**

$\boxed{4}$

次の問いに答えよ。

(1)　次の数を素因数分解せよ。

　①　210　　　　②　243

(2)　$\sqrt{\dfrac{20n}{3}}$ が自然数となるような，最小の自然数 n を求めよ。

解答

(1)　①　$210 = \mathbf{2 \times 3 \times 5 \times 7}$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 210 \\ \hline 3 & 105 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline & 7 \end{array}$$

　②　$243 = \mathbf{3^5}$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 243 \\ \hline 3 & 81 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

(2)　$20=2^2\times5$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$\dfrac{20n}{3}=\dfrac{2^2\times5\times n}{3}$ の素因数分解において，それぞれの素因数の指数がすべて偶数になればよいから

$n=3\times5$ のとき　$\dfrac{20n}{3}=\dfrac{2^2\times5\times3\times5}{3}=2^2\times5^2$

したがって，求める自然数 n は　**15**

5

(1)　次の 2 数の最大公約数，最小公倍数を求めよ。

①　10，15　　　　②　9，90

(2)　次の 3 数の最大公約数，最小公倍数を求めよ。

①　4，6，8　　　　②　18，36，48

(3)　最大公約数が 7，最小公倍数が 42 となる 2 つの自然数の組をすべて求めよ。

(4)　積が 450，最大公約数が 5 となる 2 つの自然数の組をすべて求めよ。

解答

(1)　①　$10=2\times5$

$15=3\times5$

最大公約数は　5

最小公倍数は　$2\times3\times5=$**30**

②　$9=3^2$

$90=2\times3^2\times5$

最大公約数は　$3^2=$**9**

最小公倍数は　$2\times3^2\times5=$**90**

(2)　①　$4=2^2$

$6=2\times3$

$8=2^3$

最大公約数は　2

最小公倍数は　$2^3\times3=$**24**

②　$18=2\times3^2$

$36=2^2\times3^2$

$48=2^4\times3$

最大公約数は　$2\times3=$**6**

最小公倍数は　$2^4\times3^2=$**144**

(3)　2 つの自然数を a，b $(a<b)$ とすると，最大公約数が 7 であるから

$$a=7a',\ b=7b'\quad (a',\ b' \text{ は互いに素で } a'<b')$$

と表すことができる。このとき，最小公倍数が 42 であるから　$7a'b'=42$　　よって　$a'b'=6$

a'，b' は互いに素で，$a'<b'$ より　$(a',\ b')=(1,\ 6),\ (2,\ 3)$

$(a',\ b')=(1,\ 6)$ のとき　$a=7\times1=7$，$b=7\times6=42$

$(a',\ b')=(2,\ 3)$ のとき　$a=7\times2=14$，$b=7\times3=21$

したがって，　**7 と 42，14 と 21**

(4)　2 つの自然数を a，b $(a<b)$ とし，最小公倍数を l，最大公約数を g とすると，$ab=gl$ が成り立つ。

積が 450，最大公約数が 5 であるから　$450=5\times l$　　よって　$l=90$

また，$a=5a'$，$b=5b'$ （a'，b' は互いに素で　$a'<b'$）と表すと，$l=ga'b'$ から　$90=5a'b'$

よって　$a'b'=18$

a'，b' は互いに素で，$a'<b'$ より　$(a',\ b')=(1,\ 18),\ (2,\ 9)$

$(a',\ b')=(1,\ 18)$ のとき　$a=5\times1=5$，$b=5\times18=90$

$(a',\ b')=(2,\ 9)$ のとき　$a=5\times2=10$，$b=5\times9=45$

したがって，　**5 と 90，10 と 45**

6

a，b は整数とする。a を 8 で割ると 2 余り，b を 8 で割ると 5 余る。このとき，次の式の値を 8 で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$3a+2b$　　　　(2)　ab

解答

整数 k，l を用いて，$a=8k+2$，$b=8l+5$ と表すことができる。

(1)　$3a+2b=3(8k+2)+2(8l+5)=24k+6+16l+10=8(3k+2l+2)$

ここで，$3k+2l+2$ は整数であるから，$3a+2b$ を 8 で割ったときの余りは **0** である。

(1)　$ab=(8k+2)(8l+5)=64kl+40k+16l+10=8(8kl+5k+2l+1)+2$

ここで，$8kl+5k+2l+1$ は整数であるから，ab を 8 で割ったときの余りは **2** である。

$\boxed{7}$

n は整数とする。n^2 を 4 で割ったときの余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

証明

k を整数とすると，すべての整数 n は，$4k$，$4k+1$，$4k+2$，$4k+3$ のいずれかの形で表される。

(ⅰ)　$n=4k$ のとき　$n^2=(4k)^2=16k^2=4\cdot 4k^2$

(ⅱ)　$n=4k+1$ のとき　$n^2=(4k+1)^2=16k^2+8k+1=4(4k^2+2k)+1$

(ⅲ)　$n=4k+2$ のとき　$n^2=(4k+2)^2=16k^2+16k+4=4(4k^2+4k+1)$

(ⅳ)　$n=4k+3$ のとき　$n^2=(4k+3)^2=16k^2+24k+9=4(4k^2+6k+2)+1$

よって，n^2 を 4 で割ったときの余りは 0 か 1 である。

$\boxed{8}$

次の 2 数の最大公約数を求めよ。

(1)　357，799　　　(2)　667，1771

解答

(1)　$799=357\times2+85$

$357=85\times4+17$

$85=17\times5$

したがって，最大公約数は　**17**

	5	4	2
17	)85	)357	)799
	85	340	714
	0	17	85

右の筆算から計算していく。

(2)　$1771=667\times2+437$

$667=437\times1+230$

$437=230\times1+207$

$230=207\times1+23$

$207=23\times9$

したがって，最大公約数は　**23**

	9	1	1	1	2
23	)207	)230	)437	)667	)1771
	207	207	230	437	1334
	0	23	207	230	437

右の筆算から計算していく。

$\boxed{9}$

(1)　次の方程式の整数解をすべて求めよ。

①　$5x-7y=1$　　　　　　　　　②　$4x+9y=3$

(2)　100 以下の自然数で，8 で割ると 2 余り，13 で割ると 6 余るものを求めよ。

解答

(1)　①　$5x-7y=1$　……(ⅰ)

の 1 組の整数解は $x=3$，$y=2$ であるから　$5\times3-7\times2=1$　……(ⅱ)

(ⅰ)−(ⅱ) より　$5(x-3)-7(y-2)=0$　　移項すると　$5(x-3)=7(y-2)$

5 と 7 は互いに素であるから，k を整数として　$x-3=7k$，$y-2=5k$

したがって，整数解は　$\boldsymbol{x=7k+3}$**，**$\boldsymbol{y=5k+2}$**（*k* は整数）**

②　$4x+9y=3$　……(ⅰ)

$4x+9y=1$ の 1 組の整数解は $x=-2$，$y=1$ であるから　$4\times(-2)+9\times1=1$

両辺を 3 倍すると　$4\times(-6)+9\times3=3$　……(ⅱ)

(ⅰ)−(ⅱ) より　$4(x+6)+9(y-3)=0$　　移項すると　$4(x+6)=9(-y+3)$

4 と 9 は互いに素であるから，k を整数として　$x+6=9k$，$-y+3=4k$

したがって，整数解は　$\boldsymbol{x=9k-6}$**，**$\boldsymbol{y=-4k+3}$**（*k* は整数）**

$\boxed{\text{別解}}$　$4x+9y=3$ の 1 組の整数解を，試行錯誤で $x=3$，$y=-1$ として解いてもよい。

このとき，整数解は　$x=9k+3$，$y=-4k-1$（k は整数）　となる。

(2)　求める自然数を n とし，8，13 で割ったときの商をそれぞれ l，m とすると

$n=8l+2$，　$n=13m+6$　……(ⅰ)

n を消去すると　$8l+2=13m+6$　　これを整理して　$8l-13m=4$　……(ⅱ)

(ⅱ) の 1 組の整数解は $l=7$，$m=4$ であるから　$8\times7-13\times4=4$　……(ⅲ)

(ⅱ)−(ⅲ) より　$8(l-7)-13(m-4)=0$　　移項すると　$8(l-7)=13(m-4)$

8 と 13 は互いに素であるから，(ⅱ) の整数解は　$l=13k+7$，$m=8k+4$（k は整数）

(ⅰ)より　$n=8l+2=8(13k+7)+2=104k+58$　　n は 100 以下の自然数であるから　$k=0$

したがって，求める自然数は　**58**

$\boxed{１０}$

(1) 次の分数を小数で表したとき，有限小数になるかどうか調べよ。

① $\dfrac{1}{125}$　　② $\dfrac{3}{240}$　　③ $\dfrac{2}{300}$

(2) 次の数を 10 進数で表せ。

① $123_{(4)}$　　② $123_{(5)}$　　③ $0.12_{(3)}$

(3) 次の 10 進数を，[　　] 内で指示された記数法で表せ。

① 20 [2 進法]　　② 100 [6 進法]　　③ $\dfrac{11}{16}$ [4 進法]

解答

(1) ① $125=5^3$ より，分母の素因数は 5 のみである。よって，**有限小数になる。**

② $\dfrac{3}{240}$ を既約分数で表すと $\dfrac{1}{80}$

$80=2^4\times5$ より，分母の素因数は 2 と 5 のみである。よって，**有限小数になる。**

③ $\dfrac{2}{300}$ を既約分数で表すと $\dfrac{1}{150}$

$150=2\times3\times5^2$ より，分母の素因数に 2 と 5 以外のものがある。よって，**有限小数にならない。**

(2) ① $123_{(4)}=1\times4^2+2\times4+3=\mathbf{27}$

② $123_{(5)}=1\times5^2+2\times5+3=\mathbf{38}$

③ $0.12_{(3)}=0+1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{3^2}=\boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$

(3) ①
$$\begin{aligned}20&=2\times10\\&=2\times(2\times5)\\&=2^2\times5\\&=2^2\times(2\times2+1)\\&=2^4+2^2\\&=1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+0\times2+0\\&=\mathbf{10100_{(2)}}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}2&20\\2&10\cdots0\\2&5\cdots0\\2&2\cdots1\\&1\cdots0\end{array}$$

②
$$\begin{aligned}100&=6\times16+4\\&=6\times(6\times2+4)+4\\&=6^2\times2+6+4+4\\&=2\times6^2+4\times6+4\\&=\mathbf{244_{(6)}}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}6&100\\6&16\cdots4\\&2\cdots4\end{array}$$

③ $\dfrac{11}{16}=\dfrac{2\times4+3}{4^2}=0+2\times\dfrac{1}{4}+3\times\dfrac{1}{4^2}=\mathbf{0.23_{(4)}}$

研究１

150！を計算すると，末尾に 0 が何個並ぶか。ただし，150！は 1 から 150 までのすべての自然数の積を表す。

解答

150！$=150\times149\times148\times147\times\cdots\cdots\times3\times2\times1=2^a\times3^b\times5^c\times7^d\times\cdots\cdots$　（a，b，c，d，…は整数）

150！を素因数分解したとき，素因数 2 の方が素因数 5 より多く含まれるので，c より a の方が大きい。

よって　150！$=2^{a-c}\times3^b\times7^d\times\cdots\cdots\times(2^c\times5^c)=2^{a-c}\times3^b\times7^d\times\cdots\cdots\times10^c$

150！を計算したときの末尾に並ぶ 0 の個数は，c に等しい。

すなわち，150！を素因数分解したときの素因数 5 の個数と等しい。

1 から 150 までの自然数のうち，5 の倍数は 30 個，5^2 の倍数は 6 個，5^3 の倍数は 1 個ある。

よって，150！は 5 で 30 回割り切れ，その商はさらに 5 で 6 回割り切れ，その商はさらに 5 で 1 回割り切れる。

したがって，150！を素因数分解したときの素因数 5 の個数は　$30+6+1=37$（個）

すなわち，末尾に 0 が **37 個** 並ぶ。

研究２

合同式を利用して，次のものを求めよ。

(1)　2^{222} を 7 で割ったときの余り

(2)　22^{22} を 5 で割ったときの余り

解答

(1)　$2^{222}=2^{3\times74}=8^{74}$ であり，$8\equiv1 \pmod 7$ であるから

$$2^{222}\equiv8^{74}\equiv1^{74}\equiv1 \pmod 7$$

　したがって，余りは　**1**

(2)　$22\equiv2 \pmod 5$ であるから　$22^{22}\equiv2^{22} \pmod 5$

　$4\equiv-1 \pmod 5$ であるから　$2^{22}\equiv2^{2\times11}\equiv4^{11}\equiv(-1)^{11}\equiv-1\equiv4 \pmod 5$

　したがって，余りは　**4**

研究３

a，b を自然数とするとき，次のことを証明せよ。

(1)　a，b が互いに素 $\Longleftrightarrow$ $2a+b$，$3a+2b$ は互いに素

(2)　任意の自然数 n に対し，$3n+4$ と $4n+5$ は互いに素であることを証明せよ。ただし，$ax+by=1$ を満たす整数 x，y が存在するとき，a，b は互いに素であることは証明なしに用いてもよい。

証明

(1)　$(\Longrightarrow)$　背理法を用いる。

a，b が互いに素であるとき，$2a+b$，$3a+2b$ は互いに素でないと仮定する。

このとき，$2a+b$，$3a+2b$ はある素数 p を公約数にもつから

$$2a+b=pk \quad \cdots\cdots①,\ 3a+2b=pl \quad \cdots\cdots② \qquad (k,\ l\text{ は自然数})$$

①×2－②から　$a=2pk-pl=p(2k-l)$

②×2－①×3 から　$b=2pl-3pk=p(2l-3k)$

と表すことができる。$2k-l$，$2l-3k$ は整数であるから，a，b はともに p の倍数である。

このことは，a，b が互いに素であるに矛盾する。

したがって，a，b が互いに素であるとき，$2a+b$，$3a+2b$ は互いに素である。

$(\Longleftarrow)$　背理法を用いる。

$2a+b$，$3a+2b$ が互いに素であるとき，a，b は互いに素でないと仮定する。

このとき，a，b はある素数 p を公約数にもつから　$a=pk$,　$b=pl$　(k，l は自然数)

と表すことができる。このとき　$2a+b=2pk+pl=p(2k+l)$，$3a+2b=3pk+2pl=p(3k+2l)$

$2k+l$，$3k+2l$ は自然数であるから，$2a+b$，$3a+2b$ はともに p の倍数である。

このことは，$2a+b$，$3a+2b$ が互いに素であるに矛盾する。

したがって，$2a+b$，$3a+2b$ が互いに素であるとき，a，b は互いに素である。

(2)　$a=3n+4$，$b=4n+5$，$x=4$，$y=-3$ とすると

$$ax+by=(3n+4)\cdot4+(4n+5)\cdot(-3)=12n+16-12n-15=1$$

したがって, 自然数 $3n+4$, $4n+5$ に対して, $(3n+4)x+(4n+5)y=1$ を満たす整数 x, y が存在するから, $3n+4$，$4n+5$ は互いに素である。

研究４

6 個の整数がある。この中からうまく 2 個選べば, その 2 個の整数の差は 5 で割り切れることを証明せよ。

証明

整数を 5 で割ったときの余りは 0，1，2，3，4 のいずれかである。

すべての整数は 5 で割ったときの余りによって，次の 5 つの集合に分類される。

$\{5k \mid k$ は整数$\}$，$\{5k+1 \mid k$ は整数$\}$，$\{5k+2 \mid k$ は整数$\}$，$\{5k+3 \mid k$ は整数$\}$，$\{5k+4 \mid k$ は整数$\}$

与えられた整数は 6 個であるから，部屋割り論法により同じ集合に属する 2 個の整数がある。

この 2 個の整数の差は 5 で割り切れる。