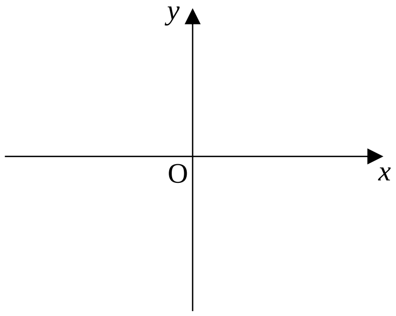
三角関数

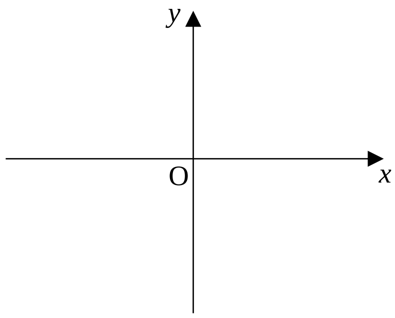
1

点 O を原点とする座標平面において，x 軸の正の部分を始線にとり，次の角だけ回転した動径 OP を図示せよ。また，動径 OP の表す一般角 θ を，$\theta = \alpha + 360^\circ \times n$（$0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ$，$n$ は整数）の形で表し，第何象限の角か答えよ。

(1)　800°

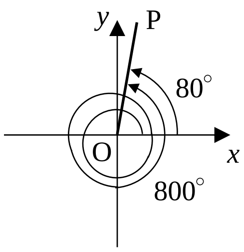


(2)　－200°



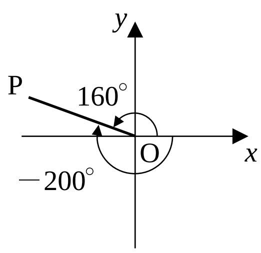
解答

(1)



$800^\circ = 80^\circ + 360^\circ \times 2$，第 1 象限の角

(2)



$-200^\circ = 160^\circ + 360^\circ \times (-1)$，第 2 象限の角

$\boxed{2}$ 次の角を，度数は弧度に，弧度は度数にそれぞれ書きなおせ。

(1) 135°　(2) -108°　(3) $\dfrac{\pi}{2}$　(4) $-\dfrac{13}{10}\pi$

解答

(1) $135^\circ = 135 \times \dfrac{\pi}{180} = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}\pi}$

(2) $-108^\circ = -108 \times \dfrac{\pi}{180} = \boldsymbol{-\dfrac{3}{5}\pi}$

(3) $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{2} \times 180^\circ = \mathbf{90}^\circ$

(4) $-\dfrac{13}{10}\pi = -\dfrac{13}{10} \times 180^\circ = \mathbf{-234}^\circ$

$\boxed{3}$

半径 9，中心角が$\dfrac{2}{3}\pi$の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

解答

$\boldsymbol{l} = 9 \cdot \dfrac{2}{3}\pi = \boldsymbol{6\pi}$

$\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{2} \cdot 9^2 \cdot \dfrac{2}{3}\pi = \boldsymbol{27\pi}$

$\boxed{\boldsymbol{S}\text{ の別解}}$　$S = \dfrac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6\pi = 27\pi$

半径 r，中心角 θ とすると，扇形の弧の長さ l と面積 S は

$l = r\theta$

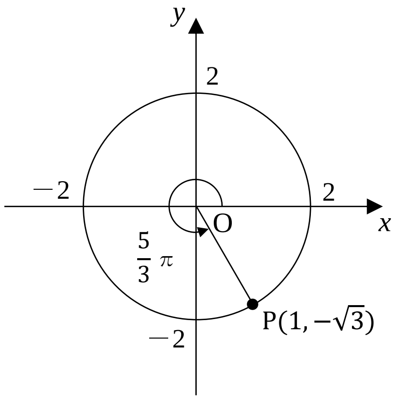
$S = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}rl$

$\boxed{4}$　θ が次の値のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

(1)　$\frac{5}{3}\pi$　　　　(2)　$-\frac{3}{4}\pi$

解答

(1)　$\frac{5}{3}\pi$の動径と，原点を中心とする半径 2 の円との交点を P とすると，$\mathrm{P}\left(1,\ -\sqrt{3}\right)$であるから

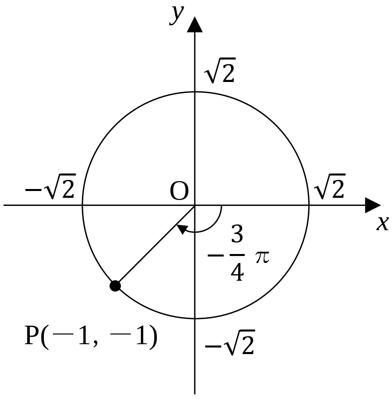


$$\boldsymbol{\sin\frac{5}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boldsymbol{\cos\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{\tan\frac{5}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}}$$

(2)　$-\frac{3}{4}\pi$ の動径と，原点を中心とする半径$\sqrt{2}$の円との交点を P とすると，$\mathrm{P}\left(-1,\ -1\right)$であるから



$$\boldsymbol{\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boldsymbol{\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boldsymbol{\tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{-1}{-1} = 1}$$

5

θ が第 4 象限の角で，$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

解答

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から　$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

θ が第 4 象限の角であるから　$\sin\theta < 0$

よって　$\boldsymbol{\sin\theta = -\sqrt{\dfrac{8}{9}} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

また　$\boldsymbol{\tan\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) \div \dfrac{1}{3} = \boldsymbol{-2\sqrt{2}}$

別解　図をかいて求める。

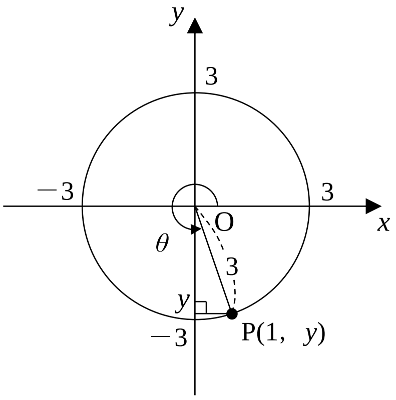
条件から，$r=3$，$x=1$ である

点 P$(1, y)$を第 4 象限にとる。

このとき　$y = -\sqrt{3^2 - 1^2} = -2\sqrt{2}$

よって　$\sin\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta = \dfrac{-2\sqrt{2}}{1} = -2\sqrt{2}$



$\boxed{6}$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

解答

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$の両辺を 2 乗すると　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$　　よって　$\sin\theta\cos\theta=-\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{3}{8}\right)\right\}=\boldsymbol{\dfrac{11}{16}}$

別解　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta\,(\sin\theta+\cos\theta)$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{9}{16}=\frac{11}{16}$$

$\boxed{7}$ 次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{100}{3}\pi$　　(2) $\tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$　　(3) $\sin\frac{3}{10}\pi+\cos\frac{4}{5}\pi$

解答

(1) $\sin\frac{100}{3}\pi=\sin\left(\frac{4}{3}\pi+32\pi\right)=\sin\frac{4}{3}\pi=-\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) $\tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\tan\frac{3}{4}\pi=-(-1)=\mathbf{1}$

(3) $\sin\frac{3}{10}\pi+\cos\frac{4}{5}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}=\mathbf{0}$

$\boxed{8}$

(1)　次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

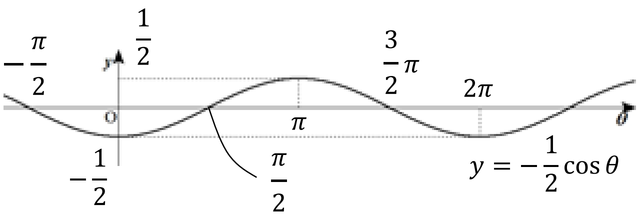
①　$y=-\dfrac{1}{2}\cos\theta$　　②　$y=\tan 2\theta$　　③　$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)+1$

(2)　(1)の①～③の関数について，偶関数であるもの，奇関数であるものをそれぞれ答えよ。

解答

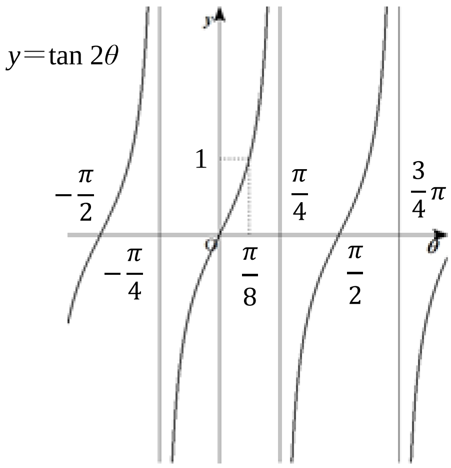
(1)　①　グラフは右のようになる。

周期は　$\boldsymbol{2\pi}$



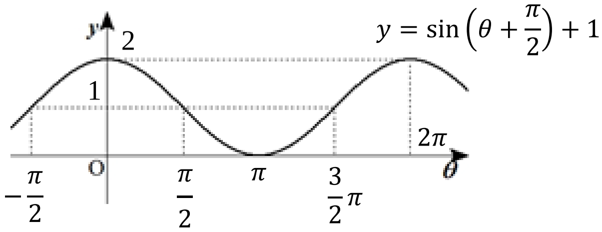
②　グラフは右のようになる。

周期は　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$



③　グラフは右のようになる。

周期は　$\boldsymbol{2\pi}$



(2)　①～③において，$y=f(\theta)$ とする。

①　$f(-\theta)=-\dfrac{1}{2}\cos(-\theta)=-\dfrac{1}{2}\cos\theta=f(\theta)$

②　$f(-\theta)=\tan(-2\theta)=-\tan 2\theta=-f(\theta)$

③　$f(-\theta)=\sin\left(-\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)+1=\cos\theta+1=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)+1=f(\theta)$

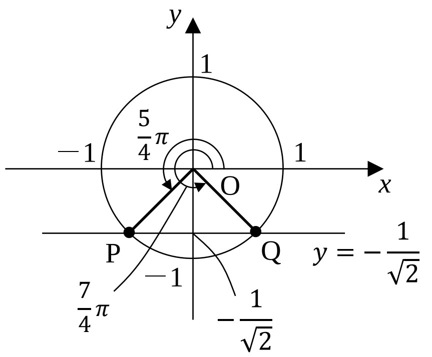
よって，**偶関数であるものは　①，③**　　**奇関数であるものは　②**

$\boxed{9}$　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　　　(2)　$\cos\theta > \dfrac{1}{2}$

解答

(1)　直線$y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$と単位円の交点を，

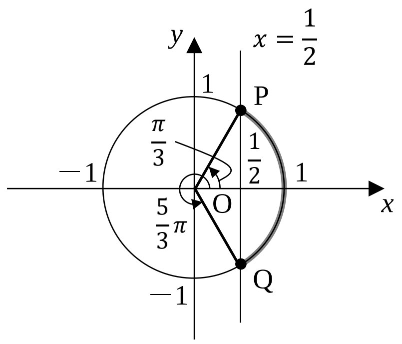


右の図のような P，Q とする。

よって，求める θ は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi}$$

(2)　直線$x = \dfrac{1}{2}$と単位円の交点を，



右の図のような P，Q とする。

よって，不等式を満たす θ の範囲は

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi}$$

１０

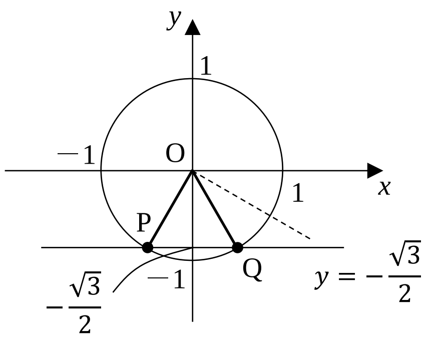
(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$のとき，方程式 $2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$ を解け。

(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

①　$2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$　　　②　$2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 \geqq 0$

解答

(1)　$X = \theta - \frac{\pi}{6}$とおくと　$\sin X = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



ここで，Xのとり得る値の範囲は

$0 \leqq \theta < 2\pi$から　$-\frac{\pi}{6} \leqq \theta - \frac{\pi}{6} < 2\pi - \frac{\pi}{6}$

よって　$-\frac{\pi}{6} \leqq X < \frac{11}{6}\pi$

これから，求めるXは　$X = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

すなわち　$\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$　　　以上から　$\boldsymbol{\theta = \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi}$

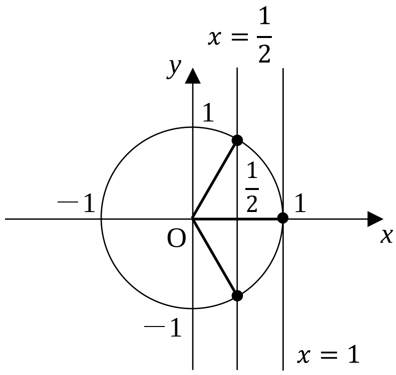
(2)　①　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から　$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

よって，与式は　$2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$

$2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$

$2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$

$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$



これから　$\cos\theta = \frac{1}{2},\ 1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$から　$\boldsymbol{\theta = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi}$

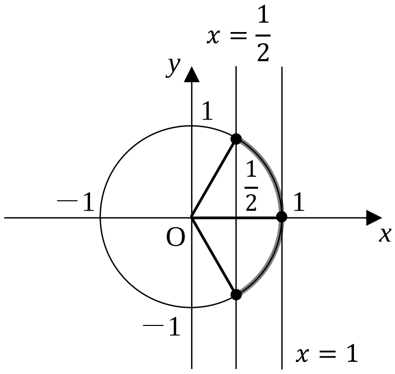
②　①と同様に変形すると

$2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 \geqq 0$

$2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 \geqq 0$

$2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 \leqq 0$

$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) \leqq 0$



これから　$\frac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$から，求めるθの範囲は

$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi \leqq \theta < 2\pi}$

$\boxed{１１}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \sin^2\theta + \cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。
また，そのときの θ の値を求めよ。

解答

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から　$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

よって，与えられた関数は　$y = (1 - \cos^2\theta) + \cos\theta$

$$= -\cos^2\theta + \cos\theta + 1$$

と変形できる。ここで，$\cos\theta = t$ とおくと　$-1 \leqq t \leqq 1$

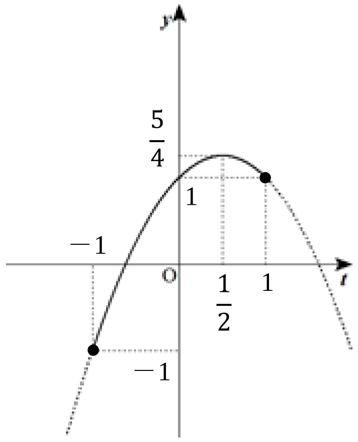
与えられた関数は　$y = -t^2 + t + 1$

$$= -(t^2 - t) + 1$$

$$= -\left\{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} + 1$$

$$= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + 1$$

$$= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

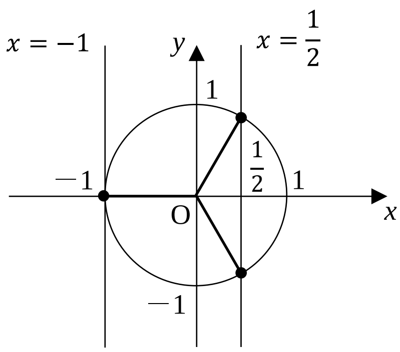


したがって，yは　$t = \frac{1}{2}$のとき最大値$\frac{5}{4}$，$t = -1$ のとき最小値 -1 をとる。

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$であるから

$t = \frac{1}{2}$となるのは，$\cos\theta = \frac{1}{2}$から　$\theta = \frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$，

$t = -1$ となるのは，$\cos\theta = -1$ から　$\theta = \pi$



以上から　$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$**，**$\boldsymbol{\frac{5}{3}\pi}$**のとき最大値**$\boldsymbol{\frac{5}{4}}$

$\boldsymbol{\theta = \pi}$**のとき最小値**$\boldsymbol{-1}$

$\boxed{１２}$ 次の値を求めよ。

(1) $\sin 15°$　　(2) $\cos 195°$　　(3) $\tan\dfrac{5}{12}\pi$

解答

(1) $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$\boxed{\text{別解}}$ $15° = 60° - 45°$ と考えてもよい。

$\sin 15° = \sin(60° - 45°) = \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\cos 195° = \cos(45° + 150°) = \cos 45° \cos 150° - \sin 45° \sin 150°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = -\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

(3) $\dfrac{5}{12}\pi = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\tan\frac{5}{12}\pi = \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\frac{\pi}{6} \cdot \tan\frac{\pi}{4}}$$

弧度法の $\dfrac{5}{12}\pi$ を，度数法に直すと

$\dfrac{5}{12} \times 180° = 75°$

$75° = 30° + 45°$ と考えることができる。

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{2+\sqrt{3}}$$

１３

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$で，$\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$，$\sin\beta=-\dfrac{3}{5}$のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin(\alpha-\beta)$　　(2)　$\cos(\alpha-\beta)$

解答

(1)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$より　$\sin\alpha>0$　　よって　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{169-144}{13^2}}=\dfrac{5}{13}$

$\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$より　$\cos\beta<0$　　よって　$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

したがって　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{5}{13}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)-\dfrac{12}{13}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\mathbf{\dfrac{16}{65}}$

(2)　(1)より　$\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，$\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$であるから

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{12}{13}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\mathbf{\frac{63}{65}}$$

１４　2 直線 $y=5x$，$2x=3y$ のなす鋭角 θ を求めよ。

解答

直線 $y=5x$ の傾きは　5

直線 $2x=3y$ は直線 $y=\dfrac{2}{3}x$ と変形できるので，傾きは　$\dfrac{2}{3}$

2 直線と x 軸の正の部分のなす角を，それぞれ α，β とすると　$\tan\alpha=5$，$\tan\beta=\dfrac{2}{3}$

よって　$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{5-\frac{2}{3}}{1+5\cdot\frac{2}{3}}=1$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4}}$

$\boxed{１５}$

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$で，$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$の値を求めよ。

解答

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$より　$\cos\alpha<0$　　よって　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

したがって　$\mathbf{\sin 2\boldsymbol{\alpha}}=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)=-\dfrac{\mathbf{\sqrt{15}}}{\mathbf{8}}$

$\mathbf{\cos 2\boldsymbol{\alpha}}=1-2\sin^2\alpha=1-2\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}$

$\mathbf{\tan 2\boldsymbol{\alpha}}=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{8}\right)\div\dfrac{7}{8}=-\dfrac{\mathbf{\sqrt{15}}}{\mathbf{7}}$

１６

$\dfrac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$で，$\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$のとき，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$の値を求めよ。

解答

$\dfrac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$より　$\cos\alpha > 0$　　よって　$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$

また，$\dfrac{3}{4}\pi < \dfrac{\alpha}{2} < \pi$より　$\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2} < 0$，$\tan\dfrac{\alpha}{2} < 0$

したがって　$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2} = \dfrac{1-\dfrac{3}{5}}{2} = \dfrac{1}{5}$

$\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$ であるから　$\boldsymbol{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{5}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2} = \dfrac{1+\dfrac{3}{5}}{2} = \dfrac{4}{5}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2} < 0$ であるから　$\boldsymbol{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = -\sqrt{\dfrac{4}{5}} = -\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$

$\boldsymbol{\tan\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \div \left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right) = -\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

１７　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin 2\theta = -\sqrt{2}\cos\theta$　　　　(2)　$\cos 2\theta < 3\cos\theta + 1$

解答

(1)　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ より，与式は　$2\sin\theta\cos\theta = -\sqrt{2}\cos\theta$

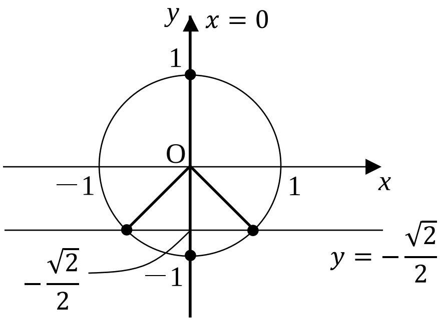
整理すると　$\cos\theta\left(2\sin\theta + \sqrt{2}\right) = 0$

よって，$\cos\theta = 0$　または　$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから，

$\cos\theta = 0$ より　$\theta = \frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ より　$\theta = \frac{5}{4}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$



以上から　$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}，\frac{5}{4}\pi，\frac{3}{2}\pi，\frac{7}{4}\pi}$

(2)　$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より，与式を変形すると　$2\cos^2\theta - 1 < 3\cos\theta + 1$

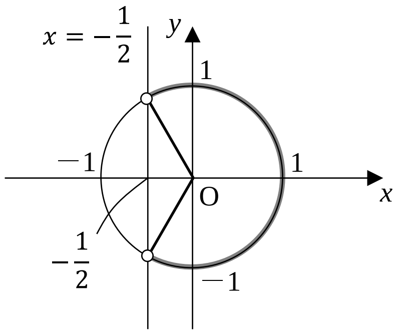
$2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 < 0$

$(\cos\theta - 2)(2\cos\theta + 1) < 0$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから，つねに　$\cos\theta - 2 < 0$

よって　$2\cos\theta + 1 > 0$　　すなわち　$\cos\theta > -\frac{1}{2}$

したがって　$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{2}{3}\pi，\frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi}$

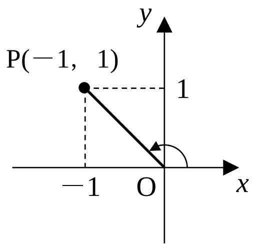


１８　次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha\leqq\pi$ とする。

(1)　$-\sin\theta+\cos\theta$　　　　(2)　$\sqrt{3}\sin\theta-3\cos\theta$

解答

(1)　$-\sin\theta+\cos\theta$ に対して，右の図のように点 $\mathrm{P}(-1,\ 1)$ をとると



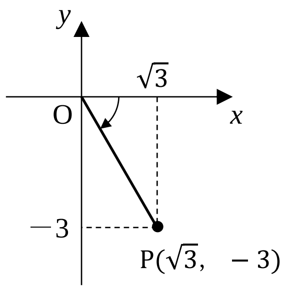
$$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},\quad \alpha=\frac{3}{4}\pi$$

よって　$-\sin\theta+\cos\theta=\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)}$

〈注意〉右辺に加法定理を用いることで，正しく変形できているかどうか確認することができる。

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{3}{4}\pi+\cos\theta\sin\frac{3}{4}\pi\right)=\sqrt{2}\left\{\sin\theta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}=-\sin\theta+\cos\theta$$

(2)　$\sqrt{3}\sin\theta-3\cos\theta$ に対して，右の図のように点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ -3)$ をとると



$$r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-3)^2}=2\sqrt{3},$$

$$\alpha=-\frac{\pi}{3}$$

よって　$\sqrt{3}\sin\theta-3\cos\theta=\boldsymbol{2\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$

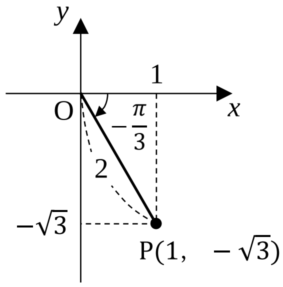
$\boxed{１９}$　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 1 = 0$　　(2)　$\sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta \leqq -\sqrt{3}$

解答

(1)　右の図から

$$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

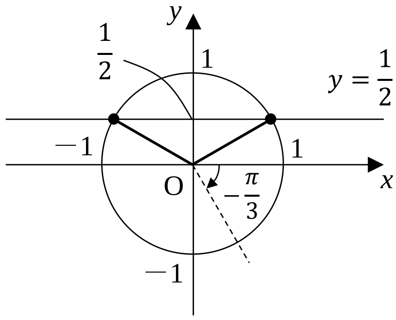


よって，与えられた式を変形すると

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$-\frac{\pi}{3} \leqq \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$ であるから

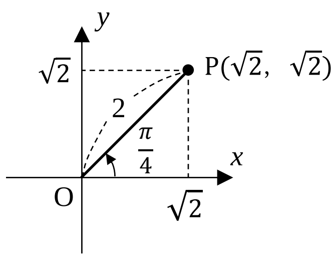
$$\theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$



したがって　$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi}$

(2)　右の図から

$$\sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$



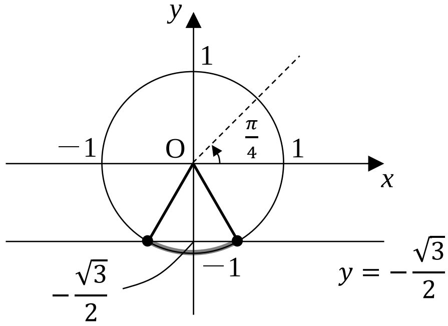
よって，与えられた式を変形すると

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ であるから

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

を解くと　$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$



これから　$\frac{4}{3}\pi \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{3}\pi$

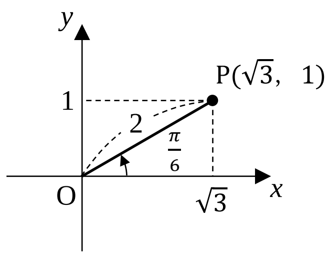
したがって　$\boldsymbol{\frac{13}{12}\pi \leqq \theta \leqq \frac{17}{12}\pi}$

$\boxed{２０}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$のとき，関数$y = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta - 1$ の最大値と最小値を求めよ。
また，そのときの θ の値を求めよ。

解答

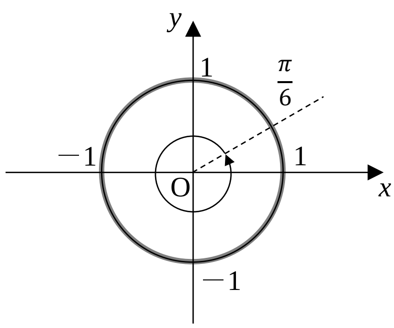
右の図から



$$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

よって，与えられた関数は　$y = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) - 1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$\frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$



$-1 \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leqq 1$ から　$-3 \leqq y \leqq 1$

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ のとき，$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ より　$\theta = \frac{\pi}{3}$

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -1$ のとき，$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi$ より　$\theta = \frac{4}{3}\pi$

したがって　$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$ **のとき最大値 1，**$\boldsymbol{\theta = \frac{4}{3}\pi}$ **のとき最小値 − 3**

研究１

θ の方程式 $\sin^2\theta+\cos\theta-a=0$ が，$0\leqq\theta<2\pi$ で 3 つの解をもつとき，定数 a の値を求めよ。

解答

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

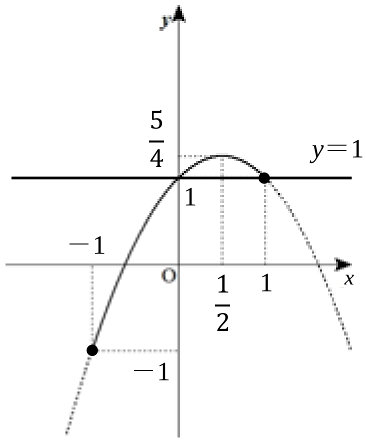
$\cos\theta=x$ とおくと　$-1\leqq x\leqq 1$

与えられた方程式は　$1-x^2+x=a$

$f(x)=1-x^2+x$ とおくと

$$f(x)=-x^2+x+1=-(x^2-x)+1$$

$$=-\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$



関数 $y=f(x)$ のグラフは右のようになる。

与えられた θ の方程式が 3 つの解をもつのは，

関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ が

$x=1$ と $-1<x<1$ で交わる

または，$x=-1$ と $-1<x<1$ で交わる

ときである。右のグラフから，$y=f(x)$ と $y=1$ が $x=0$，1 で交わるから，求める a の値は　$\boldsymbol{a=1}$

$x=0$，1 のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$，0 であり，

3 つの解をもつという題意を満たす。

研究２　次の値を求めよ。

(1)　$\sin 105^\circ\ \cos 15^\circ$　　(2)　$\cos 15^\circ\ \cos 75^\circ$

(3)　$\sin 15^\circ + \sin 75^\circ$　　(4)　$\cos 15^\circ - \cos 105^\circ$

解答

(1)　$\sin 105^\circ\ \cos 15^\circ = \dfrac{1}{2}\{\sin(105^\circ + 15^\circ) + \sin(105^\circ - 15^\circ)\} = \dfrac{1}{2}(\sin 120^\circ + \sin 90^\circ)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$$

(2)　$\cos 15^\circ\ \cos 75^\circ = \dfrac{1}{2}\{\cos(15^\circ + 75^\circ) + \cos(15^\circ - 75^\circ)\} = \dfrac{1}{2}\{\cos 90^\circ + \cos(-60^\circ)\}$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3)　$\sin 15^\circ + \sin 75^\circ = 2\sin\dfrac{15^\circ + 75^\circ}{2}\cos\dfrac{15^\circ - 75^\circ}{2} = 2\sin 45^\circ\ \cos(-30^\circ) = 2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

(4)　$\cos 15^\circ - \cos 105^\circ = -2\sin\dfrac{15^\circ + 105^\circ}{2}\sin\dfrac{15^\circ - 105^\circ}{2}$

$$= -2\sin 60^\circ\ \sin(-45^\circ) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

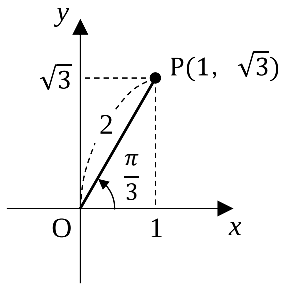
研究３　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y = \sin\theta\cos\theta - \sqrt{3}\sin^2\theta$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(2)　関数 $y = \sin 2\theta - 2\sin\theta + 2\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

解答

(1)　$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$，　$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ であるから



$$y = \sin\theta\cos\theta - \sqrt{3}\sin^2\theta = \frac{\sin 2\theta}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$\dfrac{\pi}{3} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{13}{3}\pi$

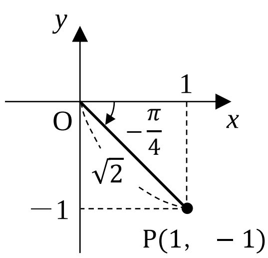
よって　$2\theta + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{2}\pi$　　すなわち，**$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{12}}$，$\boldsymbol{\dfrac{13}{12}\pi}$ のとき，$\boldsymbol{y}$ は最大値 $\boldsymbol{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ をとり，**

$2\theta + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{7}{2}\pi$　　すなわち，**$\boldsymbol{\theta = \dfrac{7}{12}\pi}$，$\boldsymbol{\dfrac{19}{12}\pi}$ のとき，$\boldsymbol{y}$ は最小値 $\boldsymbol{-1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ をとる。**

(2)　$t = \sin\theta - \cos\theta$ とおくと，$t^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - \sin 2\theta$ であるから　$\sin 2\theta = 1 - t^2$

よって　$y = \sin 2\theta - 2\sin\theta + 2\cos\theta = \sin 2\theta - 2(\sin\theta - \cos\theta) = (1-t^2) - 2t = -t^2 - 2t + 1$

$= -(t+1)^2 + 1 + 1 = -(t+1)^2 + 2$



ここで，$t = \sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$　　……①

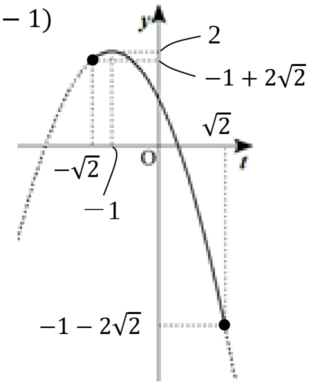
であり，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{7}{4}\pi$　……②

であるから　$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

したがって，右の図より y は

$t = -1$ のとき最大値 2

$t = \sqrt{2}$ のとき最小値 $-1 - 2\sqrt{2}$ をとる。



$t = -1$ のとき，①から　$\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

②の範囲で解くと　$\theta - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi$　　すなわち　$\theta = 0$，$\dfrac{3}{2}\pi$

$t = \sqrt{2}$ のとき，①から　$\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$　②の範囲で解くと　$\theta - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$　　すなわち　$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$

以上から，　**$\boldsymbol{\theta = 0}$，$\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\pi}$ のとき最大値 2，　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{3}{4}\pi}$ のとき最小値 $\boldsymbol{-1 - 2\sqrt{2}}$**