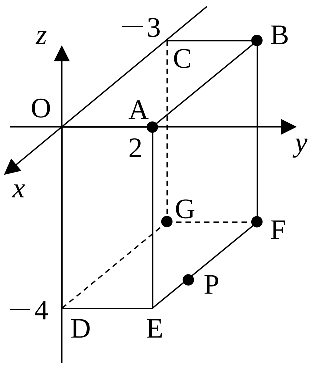
空間のベクトル

1

次の問いに答えよ。

(1) ①　右の図の直方体 OABC-DEFG について，点 A，B，F，G の座標を求めよ。

②　点 P(－1，2，－4)と，xy 平面，z 軸，原点に関して対称な点の座標を求めよ。



(2)　次の 2 点間の距離を求めよ。

①　A(1，－2，－3)，B(－1，－5，3)

②　O(0，0，0)，P(－1，2，－4)

解答

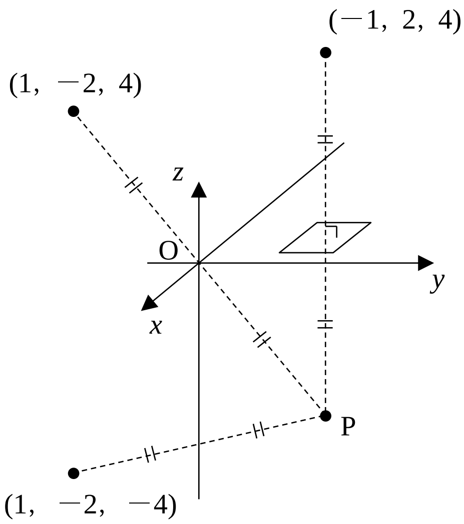
(1) ①　**点 A(0，2，0)，点 B(－3，2，0)，点 F(－3，2，－4)，点 G(－3，0，－4)**

②　点 P(－1，2，－4)と

***xy* 平面に対称な点　(－1，2，4)**

***z* 軸に対称な点　(1，－2，－4)**

原点に対称な点　(1，－2，4)



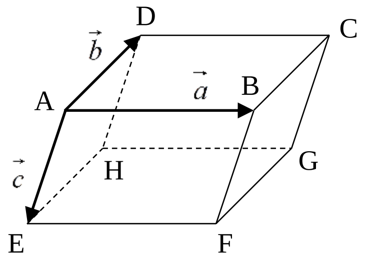
(2) ①　$\mathrm{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+\{-5-(-2)\}^2+\{3-(-3)\}^2}$

$=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+6^2}=\mathbf{7}$

②　$\mathrm{OP}=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-4)^2}=\sqrt{\mathbf{21}}$

2

平行六面体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{HF}$，$\overrightarrow{CE}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



解答

$\overrightarrow{\mathbf{HF}}=\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}}$

$\overrightarrow{\mathbf{CE}}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\boldsymbol{-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}$

3

(1)　$\vec{a}=(1,\ -2,\ -3)$，$\vec{b}=(-1,\ -5,\ 3)$のとき，$-3\vec{a}+4\vec{b}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

(2)　$\vec{a}=(1,\ -2,\ -3)$，$\vec{b}=(-1,\ -5,\ 3)$，$\vec{c}=(0,\ -4,\ -1)$のとき，$\vec{p}=(1,\ 0,\ 1)$を $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形で表せ。

解答

(1)　$-3\vec{a}+4\vec{b}=-3(1,\ -2,\ -3)+4(-1,\ -5,\ 3)=(-3,\ 6,\ 9)+(-4,\ -20,\ 12)=\mathbf{(-7,\ -14,\ 21)}$

$|-3\vec{a}+4\vec{b}|=\sqrt{(-7)^2+(-14)^2+21^2}=\mathbf{7\sqrt{14}}$

(2)　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ を成分で表すと

$(1,\ 0,\ 1)=s(1,\ -2,\ -3)+t(-1,\ -5,\ 3)+u(0,\ -4,\ -1)$

$=(s-t,\ -2s-5t-4u,\ -3s+3t-u)$

よって　$\begin{cases}1=s-t\\0=-2s-5t-4u\\1=-3s+3t-u\end{cases}$　これを解いて　$s=3$，$t=2$，$u=-4$　したがって　$\boldsymbol{\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}-4\vec{c}}$

$\boxed{4}$

2 点 A $(-3,\ 2,\ -4)$，B$(1,\ -2,\ 3)$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に平行で，大きさが 3 のベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

解答

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-(-3),\ -2-2,\ 3-(-4))=(4,\ -4,\ 7)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\vec{p}\neq\vec{0}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\vec{p}$ より，$\vec{p}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k があるから

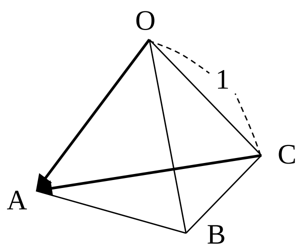
$$\vec{p}=k(4,\ -4,\ 7)=(4k,\ -4k,\ 7k)$$

$|\vec{p}|=3$ より　$\sqrt{(4k)^2+(-4k)^2+(7k)^2}=3$　　よって　$81k^2=9$　　これを解いて　$k=\pm\dfrac{1}{3}$

したがって　$\boldsymbol{\vec{p}=\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3},\ \dfrac{7}{3}\right),\ \left(-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3},\ -\dfrac{7}{3}\right)}$

$\boxed{5}$

次の問いに答えよ。



(1)　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，
　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ を求めよ。

(2)　$\vec{a}=(1,\ 4,\ 9)$，$\vec{b}=(-8,\ 3,\ 5)$のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。
　また，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(3)　$\vec{a}=(1,\ 4,\ 9)$，$\vec{b}=(-8,\ 3+4x,\ 5-x)$が垂直であるとき，$x$ の値を求めよ。

解答

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ のなす角は 60° であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\cos60^\circ=1\times1\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2)　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}=1\times(-8)+4\times3+9\times5\boldsymbol{=49}$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{49}{\sqrt{1^2+4^2+9^2}\sqrt{(-8)^2+3^2+5^2}}=\frac{49}{\sqrt{98}\sqrt{98}}=\frac{1}{2}$$

　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$

(3)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-8)+4\times(3+4x)+9\times(5-x)=49+7x$
　$\vec{a}\perp\vec{b}$ となるには，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ となればよいので　$7x+49=0$　　よって　$\boldsymbol{x=-7}$

$\boxed{6}$

3 点 O(0，0，0)，A(−3，2，−4)，B(1，−2，3)を頂点とする三角形の面積 S を求めよ。

解答

$\overrightarrow{OA}=(-3,\ 2,\ -4)$，$\overrightarrow{OB}=(1,\ -2,\ 3)$であるから

$|\overrightarrow{OA}|^2=(-3)^2+2^2+(-4)^2=29$，$|\overrightarrow{OB}|^2=1^2+(-2)^2+3^2=14$，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3\times1+2\times(-2)+(-4)\times3=-19$

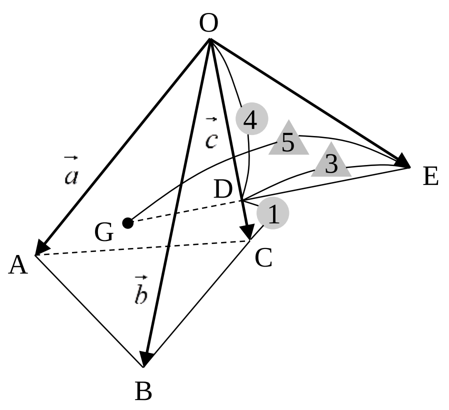
よって　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{29\times14-(-19)^2}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{5}}{2}}$

$\boxed{7}$

四面体 OABC があり，△OAB の重心を G，辺 OC を 4 : 1 に内分する点を D，線分 GD を 5 : 3 に外分する点を E とする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とするとき，

$\overrightarrow{OE}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。



解答

点 G は△OAB の重心であるから　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

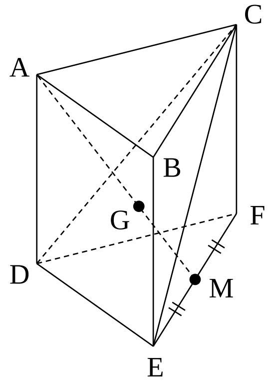
点 D は辺 OC を 4 : 1 に内分するから　$\overrightarrow{OD}=\dfrac{4}{5}\vec{c}$

点 E は線分 GD を 5 : 3 に外分するから

$$\overrightarrow{OE}=\frac{-3\overrightarrow{OG}+5\overrightarrow{OD}}{5-3}=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+\frac{5}{2}\times\frac{4}{5}\vec{c}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+2\vec{c}}$$

8

三角柱 ABC-DEF において，辺 EF の中点を M とし，△CDE の重心を G とするとき，3 点 A，G，M は一直線上にあることを証明せよ。



証明

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とすると

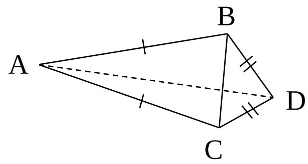
$$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}}{2}=\frac{(\vec{b}+\vec{d})+(\vec{c}+\vec{d})}{2}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d})$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}}{3}=\frac{\vec{c}+\vec{d}+(\vec{b}+\vec{d})}{3}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d})$$

よって　$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$　　　したがって，3 点 A，G，M は一直線上にある。

9

四面体 ABCD において，AB＝AC，BD＝CD とするとき，AD⊥BC であることを，ベクトルを用いて証明せよ。



証明

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

BD＝CD から　$|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{CD}|$

よって　$|\vec{d}-\vec{b}|=|\vec{d}-\vec{c}|$

$|\vec{d}|^2-2\vec{d}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{d}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$

AB＝AC から　$|\vec{b}|=|\vec{c}|$

以上から　$\vec{d}\cdot\vec{b}=\vec{d}\cdot\vec{c}$

したがって　$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{d}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{d}\cdot\vec{c}-\vec{d}\cdot\vec{b}=0$

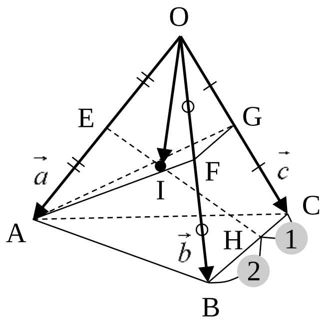
$\overrightarrow{AD}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$ であるから　AD⊥BC

$\boxed{１０}$

次の問いに答えよ。

(1)　4 点 A(−3，2，−4)，B(3，2，−1)，C(2，0，4)，P(x，4，−6)が同一平面上にあるとき，x の値を求めよ。

(2)　四面体 OABC において，辺 OA，OB，OC の中点を E，F，G，辺 BC を 2 : 1 に内分している点を H とし，直線 EH と平面 AFG の交点を I とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



解答

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3-(-3),\ 2-2,\ -1-(-4))=(6,\ 0,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2-(-3),\ 0-2,\ 4-(-4))=(5,\ -2,\ 8)$

であるから，3 点 A，B，C は一直線上にない。

よって，点 P が平面 ABC 上にあるためには　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

となる実数 s，t があることである。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-(-3),\ 4-2,\ -6-(-4))=(x+3,\ 2,\ -2)$から

$$(x+3,\ 2,\ -2)=s(6,\ 0,\ 3)+t(5,\ -2,\ 8)=(6s+5t,\ -2t,\ 3s+8t)$$

これから，$\begin{cases} x+3=6s+5t \\ 2=-2t \\ -2=3s+8t \end{cases}$　を解いて　$t=-1$，$s=2$，　$\boldsymbol{x=4}$

$\boxed{\text{別解}}$　（3 点 A，B，C が一直線上にないことを示すまでは解答と同じ。）

点 P が平面 ABC 上にあるためには　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，　$r+s+t=1$

となる実数 r，s，t があることである。よって

$(x,\ 4,\ -6)=r(-3,\ 2,\ -4)+s(3,\ 2,\ -1)+t(2,\ 0,\ 4)=(-3r+3s+2t,\ 2r+2s,\ -4r-s+4t)$

これから，$\begin{cases} x=-3r+3s+2t \\ 4=2r+2s \\ -6=-4r-s+4t \\ r+s+t=1 \end{cases}$　を解いて　$r=0$，$s=2$，$t=-1$，　$x=4$

(2)　$$\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2+1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$$

点 I は直線 EH 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{EI}}=k\overrightarrow{\mathrm{EH}}$ となる実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{EI}}=k\overrightarrow{\mathrm{EH}}=k\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)=-\frac{1}{2}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{2}{3}k\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{EI}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\overrightarrow{\mathrm{EI}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}=-\frac{1}{2}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{2}{3}k\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}(1-k)\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{2}{3}k\vec{c}$ ……①

また，点 I は平面 AFG 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=s\overrightarrow{\mathrm{AF}}+t\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ となる実数 s，t がある。

$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\vec{a}+s\overrightarrow{\mathrm{AF}}+t\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{a}+s(\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$$=\vec{a}+s\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)+t\left(\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}\right)=(1-s-t)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}+\frac{1}{2}t\vec{c}\quad\cdots\cdots②$$

①，②から　$\frac{1}{2}(1-k)\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{2}{3}k\vec{c}=(1-s-t)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}+\frac{1}{2}t\vec{c}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから　$\frac{1}{2}(1-k)=1-s-t$，$\frac{1}{3}k=\frac{1}{2}s$，$\frac{2}{3}k=\frac{1}{2}t$　よって　$k=\frac{1}{3}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}}$

別解　（①を求めるところまでは同じ。）

$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{1}{2}(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\frac{4}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OG}}$　であり，点 I は平面 AFG 上にあるから

$$\frac{1}{2}(1-k)+\frac{2}{3}k+\frac{4}{3}k=1$$

よって　$k=\frac{1}{3}$　したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$

１１

次の問いに答えよ。

(1)　点 A(−3，2，−4)を通る次のような平面の方程式を，それぞれ求めよ。

①　x 軸に垂直　　②　y 軸に垂直　　③　xy 平面に平行

(2)　点 A(−3，2，−4)を中心とし，半径が 5 の球面の方程式を求めよ。

解答

(1)　①　$\boldsymbol{x=-3}$

②　$\boldsymbol{y=2}$

③　xy 平面に平行な平面は，z 軸に垂直な平面であるから　$\boldsymbol{z=-4}$

(2)　$\{x-(-3)\}^2+(y-2)^2+\{z-(-4)\}^2=5^2$

すなわち　$\boldsymbol{(x+3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25}$

研究１

(1)　点 A$(-3,\ 2,\ -4)$を通り，次のベクトル$\vec{u}$を方向ベクトルとする直線の方程式を求めよ。

①　$\vec{u}=(1,\ -2,\ 3)$　　　②　$\vec{u}=(3,\ 2,\ 0)$

(2)　2 点$(-3,\ 2,\ -4)$，$(1,\ -2,\ 3)$を通る直線の方程式を求めよ。

(3)　2 直線 l_1：$\dfrac{x-7}{4}=\dfrac{y+5}{5}=z-8$，$l_2$：$\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-2}{2}=5-z$ のなす角 θ を求めよ。

ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ とする。

解答

(1)　①　$\boldsymbol{x+3=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+4}{3}}$

②　$\boldsymbol{\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-2}{2}}$，$\boldsymbol{z=-4}$

(2)　求める直線の方向ベクトルを$\vec{u}$とすると

$$\vec{u}=(1,\ -2,\ 3)-(-3,\ 2,\ -4)=(4,\ -4,\ 7)$$

点$(-3,\ 2,\ -4)$を通るから　$\boldsymbol{\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+4}{7}}$

(3)　2 直線 l_1，l_2 の方向ベクトルをそれぞれ$\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$とすると　$\overrightarrow{u_1}=(4,\ 5,\ 1)$，$\overrightarrow{u_2}=(3,\ 2,\ -1)$

$\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$ のなす角が 2 直線 l_1，l_2 のなす角 θ であるから

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\frac{4\times3+5\times2+1\times(-1)}{\sqrt{4^2+5^2+1^2}\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{21}{\sqrt{42}\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ であるから　$\boldsymbol{\theta=30^\circ}$

研究２

次の問いに答えよ。

(1)　点 A$(-3,\ 2,\ -4)$を通り，法線ベクトルが$\vec{n}=(1,\ -2,\ 3)$である平面の方程式を求めよ。

(2)　点$(-3,\ 2,\ -4)$と平面 $3x+2y-z-6=0$ の距離 h を求めよ。

解答

(1)　$(x+3)-2(y-2)+3(z+4)=0$　　すなわち　$\boldsymbol{x-2y+3z+19=0}$

(2)　$h=\dfrac{|3\times(-3)+2\times2-(-4)-6|}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-7|}{\sqrt{14}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{14}}{2}}$