確率

$\boxed{1}$

(1)　2 枚の硬貨を同時に投げるとき，表が 1 枚出る確率を求めよ。

(2)　2 個のさいころを同時に投げるとき，目の積が 12 となる確率を求めよ。

解答

(1)　起こり得るすべての場合の数は

$2^2=4$（通り）

このうち，表が 1 枚出るのは

（表，裏），（裏，表）

の 2 通り。

よって，求める確率は　$\dfrac{2}{4}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

> 2 枚の硬貨は区別して考える。全事象は
>
> （表，表），（表，裏），（裏，表），（裏，裏）
>
> の 4 通りで，これらの根元事象は同様に確からしい。
>
> 2 枚の硬貨を区別せずに考え，全事象を
>
> （表，表），（表，裏），（裏，裏）
>
> の 3 通りとすると，（表，表）と（表，裏）は同様に確からしくないため，確率を計算することができない。

(2)　目の出方は全部で　$6\times6=36$（通り）

このうち，目の積が 12 になるのは，(2，6)，(3，4)，(4，3)，(6，2) の 4 通り。

よって，求める確率は　$\dfrac{4}{36}=\mathbf{\dfrac{1}{9}}$

$\boxed{2}$

男子 3 人と女子 3 人が 1 列に並ぶとき，男子と女子が交互に並ぶ確率を求めよ。

解答

6 人が 1 列に並ぶ並び方は 6! 通り。

このうち，男子と女子が交互に並ぶのは

男 女 男 女 男 女　　　　女 男 女 男 女 男

の 2 つの場合がある。いずれの場合にも，男子の並び方は 3! 通り，そのおのおのに対して女子の並び方は 3! 通りずつあるから　$2\times3!\times3!$ 通りある。

よって，求める確率は　$\dfrac{2\times3!\times3!}{6!}=\dfrac{2\times3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\mathbf{\dfrac{1}{10}}$

$\boxed{3}$

当たり 3 本を含む 10 本のくじから，同時に 3 本のくじを引くとき，当たりをちょうど 1 本引く確率を求めよ。

解答

くじは全て区別できると考え，10 本のくじから 3 本を引く場合の数は ${}_{10}C_3$ 通り。
このうち，当たり 3 本から 1 本，はずれ 7 本から 2 本を引く場合の数は　${}_3C_1\times{}_7C_2$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_3C_1\times{}_7C_2}{{}_{10}C_3}=\dfrac{3\times\dfrac{7\cdot6}{2}}{\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}}=\mathbf{\dfrac{21}{40}}$

$\boxed{4}$
3 人でじゃんけんを 1 回するとき，あいこになる確率を求めよ。

解答

3 人の手の出し方は全部で　$3^3=27$（通り）
あいこになるのは，3 人全員が同じ手になるときと，3 人全員がそれぞれ異なる手になるときであり，これらの事象は互いに排反である。
(ⅰ)　3 人全員が同じ手になる確率

全員が「グー」，または「チョキ」，または「パー」になるときであるから　$\dfrac{3}{27}$

(ⅱ)　3 人全員がそれぞれ異なる手になる確率

3 人で 3 種類の手（グー，チョキ，パー）を出す場合の数は　$3!=6$（通り）であるから　$\dfrac{6}{27}$

したがって，あいこになる確率は　$\dfrac{3}{27}+\dfrac{6}{27}=\dfrac{9}{27}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

$\boxed{5}$
1 から 50 までの番号が書かれた 50 枚のカードから 1 枚引くとき，その番号が 3 または 7 で割り切れる確率を求めよ。

解答

50 枚のカードから

3 で割り切れる番号を引く事象 A の起こる場合の数は　$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot16\}$ から　16 通り

7 で割り切れる番号を引く事象 B の起こる場合の数は　$B=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot7\}$ から　7 通り

また，積事象 $A\cap B$ は 21 で割り切れる番号を引く事象であるから　$A\cap B=\{21\cdot1,\ 21\cdot2\}$ より　2 通り

よって，求める確率は　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{16}{50}+\dfrac{7}{50}-\dfrac{2}{50}=\mathbf{\dfrac{21}{50}}$

6

(1)　12 個の製品の中に 3 個の不良品が含まれている。この中から 2 個取り出すとき，不良品が含まれる確率を求めよ。

(2)　3 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

　①　出た目の最大値が 4 以下である確率

　②　出た目の最大値が 4 である確率

解答

(1)　不良品が含まれるという事象は，2 個とも不良品ではない事象 A の余事象 $\overline{A}$ である。

$$P(A)=\frac{{}_9\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=\frac{\frac{9\cdot8}{2\cdot1}}{\frac{12\cdot11}{2\cdot1}}=\frac{6}{11}$$

であるから，求める確率は　$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{6}{11}=\boldsymbol{\dfrac{5}{11}}$

(2)　①　3 個のさいころを同時に投げるとき，起こり得るすべての場合の数は 6^3 通り。

さいころの出た目の最大値が 4 以下であるのは，3 個のさいころの出た目すべてが 4 以下である場合である。その場合の数は 4^3 通り。

よって，求める確率は　$\dfrac{4^3}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{8}{27}}$

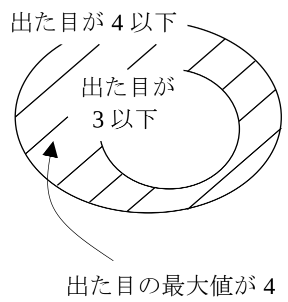
②　3 個のさいころの出た目すべてが 3 以下である場合は　3^3 通り。

さいころの出た目の最大値が 4 である場合の数は

(出た目が 4 以下の場合の数)－(出た目が 3 以下の場合の数)

であるから 4^3-3^3 通り。

よって，求める確率は　$\dfrac{4^3-3^3}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{37}{216}}$



7

袋 A には赤玉 3 個と白玉 5 個，袋 B には赤玉 4 個と白玉 2 個が入っている。袋 A から 1 個，袋 B から 1 個の玉を取り出すとき，2 個が異なる色の玉である確率を求めよ。

解答

袋 A から玉を取り出す試行と，袋 B から玉を取り出す試行は独立である。

2 個が異なる色になるのは，袋 A から赤玉，袋 B から白玉を取り出すときと，袋 A から白玉，袋 B から赤玉を取り出すときであり，これらの事象は互いに排反である。

(ⅰ)　袋 A から赤玉，袋 B から白玉を取り出す確率

袋 A から赤玉 1 個を取り出す確率は　$\dfrac{3}{8}$，　　袋 B から白玉 1 個を取り出す確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

よって，袋 A から赤玉，袋 B から白玉を取り出す確率は　$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{24}$

(ⅱ)　袋 A から白玉，袋 B から赤玉を取り出す確率

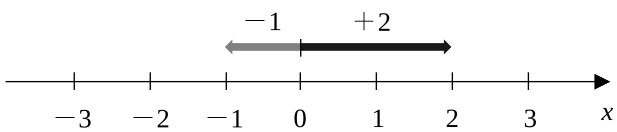
袋 A から白玉 1 個を取り出す確率は　$\dfrac{5}{8}$，　　袋 B から赤玉 1 個を取り出す確率は　$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

よって，袋 A から白玉，袋 B から赤玉を取り出す確率は　$\dfrac{5}{8}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{24}$

したがって，2 個が異なる色になる確率は　$\dfrac{3}{24}+\dfrac{10}{24}=\boldsymbol{\dfrac{13}{24}}$

8

(1)　x 軸上に点 P がある。1 個のさいころを投げて，3 の倍数の目が出たとき，P は x 軸上の正の方向に 2 だけ進み，3 の倍数でない目が出たとき，P は x 軸の負の方向に 1 だけ進むことにする。さいころを 5 回投げたとき，原点から出発した P が $x=1$ の点にある確率を求めよ。



(2)　A，B の 2 チームがバレーボールの試合をする。先に 3 セットを先取した方を優勝とするとき，次の確率を求めよ。ただし，1 セットのゲームで A が B に勝つ確率は $\dfrac{2}{3}$，B が A に勝つ確率は $\dfrac{1}{3}$　であるとする。

①　3 セット目で A が優勝する確率

②　4 セット目で A が優勝する確率

③　A が優勝する確率

(3)　6 枚の硬貨を投げるとき，表が 3 枚，裏が 3 枚となる確率を求めよ。

解答

(1)　さいころを 5 回投げて，3 の倍数の目が出る回数を r とすると，3 の倍数でない目が出る回数は $5-r$ である。このとき，点 P の x 座標は　$x=2\times r+(-1)\times(5-r)=3r-5$

$x=1$ を代入すると　$1=3r-5$ より　$r=2$

よって，3 の倍数の目がちょうど 2 回出る確率を求めればよい。

3 の倍数の目	：3，6
3 の倍数でない目	：1，2，4，5

さいころを 1 回投げたとき，3 の倍数の目が出る確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

したがって，求める確率は　${}_5C_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^{5-2}=\dfrac{5\cdot4}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{80}{243}}$

(2)　①　3 セット目で A が優勝するのは

A が 3 連勝する

ときであるから　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\mathbf{\dfrac{8}{27}}$

②　4 セット目で A が優勝するのは

3 セット目までに A が 2 勝し，

4 セット目に A が勝つ

ときであるから　${}_3C_1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}$

$=\mathbf{\dfrac{8}{27}}$

A が 3 勝 1 敗なので　${}_4C_1\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\cdot\dfrac{1}{3}$　とするのは誤り。
これは A が　勝勝勝敗　となる場合も含まれ，このときは 3 セット目で優勝が決まるので，4 セット目は無効となる。
最終セットは，優勝するチームが勝つことに注意する。

③　A が優勝するのは

(ⅰ)　3 セット目　　(ⅱ)　4 セット目　　(ⅲ)　5 セット目

で優勝する場合があり，これらは互いに排反である。

①，②から，(ⅰ) の確率は　$\dfrac{8}{27}$，　(ⅱ) の確率は　$\dfrac{8}{27}$　であるから，(ⅲ) の確率を求めればよい。5 セット目で A が優勝するのは

4 セット目までに A が 2 勝し，5 セット目に A が勝つ

ときであるから　${}_4C_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4\cdot3}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{16}{81}$

したがって，求める確率は　$\dfrac{8}{27}+\dfrac{8}{27}+\dfrac{16}{81}=\mathbf{\dfrac{64}{81}}$

(3)　求める確率は，1 枚の硬貨を 6 回投げるとき，表が 3 枚，裏が 3 枚出る確率と同じであり，反復試行の確率として考えることができる。

表が出る確率も裏が出る確率も　$\dfrac{1}{2}$　であるから，

求める確率は　${}_6C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$

$=\mathbf{\dfrac{5}{16}}$

例えば，〇×式の問題が 6 題あり，でたらめに〇印と×印を付けるとき，3 題正解する確率や，6 人がグーとパーで 2 つのグループに分かれるとき，1 回でちょうど 3 人ずつに分かれる確率も，同様の計算で　$\dfrac{5}{16}$　である。

$\boxed{9}$

当たり 4 本を含む 10 本のくじがある。最初に a が 1 本引き，それをもとに戻さないで次に b が 1 本引くとき，b が当たりくじを引く確率を求めよ。

解答

　　a が当たりくじを引く事象を A,

　　b が当たりくじを引く事象を B

とする。b が当たりくじを引く場合は，次の 2 通りある。

(ｉ)　a が当たりくじを引き，b も当たりくじを引く場合

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{12}{90}$$

(ⅱ)　a がはずれくじを引き，b が当たりくじを引く場合

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{24}{90}$$

(ｉ)と(ⅱ)は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=\frac{12}{90}+\frac{24}{90}=\frac{36}{90}=\boldsymbol{\frac{2}{5}}$$

研究

同じ製品を製造している 2 つの機械 A, B があり, 機械 A の製品には 0.3 % ，機械 B の製品には 0.1 % の不良品が含まれている。機械 A の製品を 400 個，機械 B の製品を 600 個抜き出し，よくかき混ぜたあとで 1 個の製品を取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1)　不良品である確率

(2)　不良品であったとき，それが機械 A の製品である確率

解答

(1)　取り出した 1 個が，機械 A の製品である事象を A,

機械 B の製品である事象を B,

不良品である事象を E

とする。　$P(A)=\frac{400}{1000}$，$P(B)=\frac{600}{1000}$，$P_A(E)=\frac{3}{1000}$，$P_B(E)=\frac{1}{1000}$

よって　$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)=P(A)P_A(E)+P(B)P_B(E)$

$$=\frac{400}{1000}\times\frac{3}{1000}+\frac{600}{1000}\times\frac{1}{1000}=\frac{12+6}{10000}=\boldsymbol{\frac{9}{5000}}$$

(2)　求める確率は $P_E(A)$であるから

$$P_E(A)=\frac{P(E\cap A)}{P(E)}=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{12}{10000}\div\frac{9}{5000}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$