複素数と方程式

1 次の計算をせよ。ただし，i は虚数単位とする。

〈注意〉以後，特に断りがない限り，i は虚数単位を表すものとする。

(1) $(6-2i)(-3+4i)$ (2) $\dfrac{\sqrt{-72}}{\sqrt{-8}}$ (3) $\left(\dfrac{1+2i}{2-i}\right)^2$

解答

(1) $(6-2i)(-3+4i)=-18+24i+6i-8i^2=-18+30i+8=\mathbf{-10+30}\boldsymbol{i}$

(2) $\dfrac{\sqrt{-72}}{\sqrt{-8}}=\dfrac{\sqrt{72}i}{\sqrt{8}i}=\sqrt{9}=\mathbf{3}$

(3) まず，$\dfrac{1+2i}{2-i}$ を計算する。

$$\frac{1+2i}{2-i}=\frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2+i+4i+2i^2}{4-i^2}=\frac{2+5i-2}{4+1}=\frac{5i}{5}=i$$

これより $\left(\dfrac{1+2i}{2-i}\right)^2=i^2=\mathbf{-1}$

2 次の等式を満たす実数 x，y を求めよ。

(1) $(5+2i)x+(2-2i)y=16-2i$ (2) $(3+2i)(2x-yi)=4+7i$

解答

(1) 与えられた等式の左辺を i について整理すると $5x+2y+(2x-2y)i=16-2i$

x，y が実数であるから，$5x+2y$，$2x-2y$ も実数である。

よって $\begin{cases}5x+2y=16\\2x-2y=-2\end{cases}$ を満たす x，y を求めればよい。

連立方程式を解くと $\boldsymbol{x=2,\ y=3}$

(2) $(3+2i)(2x-yi)=6x-3yi+4xi-2yi^2$

これより，与えられた等式の左辺を i について整理すると $6x+2y+(4x-3y)i=4+7i$

x，y が実数であるから，$6x+2y$，$4x-3y$ も実数である。

よって $\begin{cases}6x+2y=4\\4x-3y=7\end{cases}$ を満たす x，y を求めればよい。

連立方程式を解くと $\boldsymbol{x=1,\ y=-1}$

3

(1)　次の 2 次方程式を解け。

①　$3x^2+5x+3=0$　　②　$\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}=0$

(2)　次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ。

①　$4x^2+12x+9=0$　　②　$-11x^2+12x-4=0$

(3)　2 次方程式 $x^2+2(k-1)x-k^2+3k+1=0$ が重解をもつような定数 k の値と，そのときの重解をすべて求めよ。

解答

(1)　①　解の公式より　$\boldsymbol{x}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot3\cdot3}}{2\cdot3}=\frac{-5\pm\sqrt{25-36}}{6}=\boldsymbol{\frac{-5\pm\sqrt{11}i}{6}}$

②　両辺に 12 を掛けると $4x^2+3x-2=0$ となるので，解の公式より

$$\boldsymbol{x}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot4\cdot(-2)}}{2\cdot4}=\frac{-3\pm\sqrt{9+32}}{8}=\boldsymbol{\frac{-3\pm\sqrt{41}}{8}}$$

(2)　①　$D=12^2-4\cdot4\cdot9=144-144=0$ であるから　**重解をもつ。**

②　$D=12^2-4\cdot(-11)\cdot(-4)=144-176=-32$ より，$D<0$ であるから　**異なる 2 つの虚数解をもつ。**

(3)　$D=\{2(k-1)\}^2-4\cdot1\cdot(-k^2+3k+1)=4(k^2-2k+1)+4k^2-12k-4$

$=4k^2-8k+4+4k^2-12k-4=8k^2-20k=4k(2k-5)$

題意より，$D=0$ となるときの k の値を求める。　$4k(2k-5)=0 \Rightarrow k=0,\ \frac{5}{2}$

$k=0$ のとき　$x^2+2(0-1)x-0^2+3\cdot0+1=x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$

$k=\frac{5}{2}$ のとき　$x^2+2\left(\frac{5}{2}-1\right)x-\left(\frac{5}{2}\right)^2+3\cdot\frac{5}{2}+1=x^2+3x-\frac{25}{4}+\frac{15}{2}+1=x^2+3x+\frac{9}{4}=0$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

以上より　$\boldsymbol{k=0}$ **のとき** $\boldsymbol{x=1}$**，**$\boldsymbol{k=\frac{5}{2}}$ **のとき** $\boldsymbol{x=-\frac{3}{2}}$

$\boxed{4}$　2 次方程式 $2x^2-4x+5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の値を求めよ。

(1)　$(\alpha+1)(\beta+1)$　　(2)　$(\alpha-\beta)^2$　　(3)　$\alpha^3+\beta^3$

解答

2 次方程式の解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-\dfrac{-4}{2}=2$，$\alpha\beta=\dfrac{5}{2}$

(1)　$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=\dfrac{5}{2}+2+1=\mathbf{\dfrac{11}{2}}$

(2)　$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\cdot\dfrac{5}{2}=4-10=\mathbf{-6}$

(3)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\cdot\dfrac{5}{2}\cdot2=8-15=\mathbf{-7}$

$\boxed{5}$

(1)　2 つの数 $3+5i$，$3-5i$ を解にもつ 2 次方程式を 1 つ作れ。

(2)　2 次方程式 $x^2-2x+5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の 2 つの数を解にもつ 2 次方程式を 1 つ作れ。

①　$2\alpha-1$，$2\beta-1$　　②　α^2，β^2

(3)　和が 7，積が 3 である 2 つの数を求めよ。

解答

(1)　$\alpha=3+5i$，$\beta=3-5i$ とする。

$\alpha+\beta=(3+5i)+(3-5i)=6$，$\alpha\beta=(3+5i)(3-5i)=9-25i^2=34$

よって　$\mathbf{x^2-6x+34=0}$

(2)　2 次方程式の解と係数の関係により　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=5$

①　$(2\alpha-1)+(2\beta-1)=2\alpha+2\beta-2=2(\alpha+\beta)-2=2\cdot2-2=2$

$(2\alpha-1)(2\beta-1)=4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+1=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1=4\cdot5-2\cdot2+1=20-4+1=17$

よって　$\mathbf{x^2-2x+17=0}$

②　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot5=4-10=-6$，$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=5^2=25$

よって　$\mathbf{x^2+6x+25=0}$

(3)　2 つの数を α，β とおくと　$\alpha+\beta=7$，$\alpha\beta=3$

よって，α，β を解にもつ 2 次方程式は　$x^2-7x+3=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot3}}{2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-12}}{2}=\dfrac{7\pm\sqrt{37}}{2}$

したがって，2 つの数は　$\mathbf{\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}}$，$\mathbf{\dfrac{7-\sqrt{37}}{2}}$

$\boxed{6}$

2 次方程式 $x^2-(m+2)x+5=0$ が，異なる 2 つの正の解をもつように実数 m の値の範囲を定めよ。

解答

2 次方程式 $x^2-(m+2)x+5=0$ の判別式を D，2 つの解を α，β とすると

$$D=\{-(m+2)\}^2-4\cdot1\cdot5=m^2+4m+4-20=m^2+4m-16,\quad \alpha+\beta=m+2,\quad \alpha\beta=5$$

$D>0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$　を満たせばよい。

(i)　$D>0$　すなわち　$m^2+4m-16>0$

　$m^2+4m-16=0$ の解は　$m=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot(-16)}}{2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+64}}{2}=\dfrac{-4\pm4\sqrt{5}}{2}=-2\pm2\sqrt{5}$

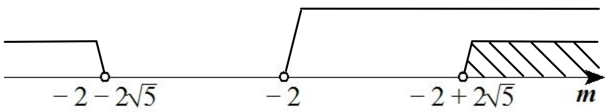
　したがって　$m<-2-2\sqrt{5}$，$-2+2\sqrt{5}<m$

(ii)　$\alpha+\beta>0$　すなわち　$m+2>0$　よって　$m>-2$

(iii)　$\alpha\beta>0$

　$\alpha\beta=5$ より　$\alpha\beta>0$ を満たしている。

以上のことから，右の数直線より　$\boldsymbol{m>-2+2\sqrt{5}}$



$\boxed{7}$

(1)　多項式 x^3+1 を $x-2$ で割ったときの余りを求めよ。

(2)　多項式 $P(x)$を，$x-2$，$x+1$ で割ったときの余りがそれぞれ-2，1 のとき，$P(x)$を x^2-x-2 で割ったときの余りを求めよ。

解答

(1)　$P(x)=x^3+1$ とおく。

　剰余の定理により，求める余りは　$P(2)=2^3+1=8+1=\mathbf{9}$

(2)　2 次式 x^2-x-2 で割ったときの余りは 1 次式または定数となるので $ax+b$ とおける。

　$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$より，$P(x)$を 2 次式$(x-2)(x+1)$で割ったときの商を Q とすると

$$P(x)=(x-2)(x+1)Q+ax+b$$

　と表すことができる。

　剰余の定理により　$P(2)=-2$，$P(-1)=1$ であるから

$$2a+b=-2,\quad -a+b=1$$

　これらを連立させて解くと　$a=-1$，$b=0$　　よって，求める余りは　$\boldsymbol{-x}$

8 次の方程式を解け。

(1) $x^4-3x^2-4=0$　　　　(2) $x^3+x^2+4=0$

解答

(1) $x^2=A$ とおくと　$x^4=(x^2)^2$ より与えられた方程式は

$$A^2-3A-4=0$$

と表すことができる。

$$A^2-3A-4=(A+1)(A-4)=0 \text{ より} \qquad A=-1,\ 4$$

$A=x^2$ であるから　$x^2=-1,\ 4$　　したがって　$\boldsymbol{x=\pm i,\ \pm 2}$

〈注意〉置き換えることによって 2 次方程式に変換できる高次方程式を，複 2 次方程式（または複 2 次式）という。

(2) $P(x)=x^3+x^2+4$ とおくと　$(-2)^3+(-2)^2+4=-8+4+4=0$ より　$P(-2)=0$

右の組立除法により

$$P(x)=(x+2)(x^2-x+2)$$

-2	1	1	0	4
		-2	2	-4
	1	-1	2	0

$P(x)=0$ から　$x+2=0$　または　$x^2-x+2=0$

解の公式により

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot2}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

したがって　$\boldsymbol{x=-2,\ \dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}}$

9

(1) 方程式 $x^3+ax+2=0$ の 1 つの解が $x=2$ であるとき，実数 a の値を求めよ。また，そのときの他の解を求めよ。

(2) 方程式 $x^3+ax^2+bx-6=0$ の 1 つの解が $x=1+\sqrt{2}i$ であるとき，実数 a，b の値を求めよ。また，そのときの他の解を求めよ。

解答

(1) 与えられた方程式に $x=2$ を代入すると

$$2^3+a\cdot2+2=8+2a+2=0 \qquad \text{よって} \quad a=-5$$

2	1	0	-5	2
		2	4	-2
	1	2	-1	0

方程式 $x^3-5x+2=0$ は $x=2$ を解にもつから

右の組立除法により　$(x-2)(x^2+2x-1)=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\dfrac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$

したがって　**$\boldsymbol{a=-5}$，他の解は $\boldsymbol{x=-1\pm\sqrt{2}}$**

(2)　この方程式は $x=1-\sqrt{2}i$ も解にもつ。

$$x=1\pm\sqrt{2}i \quad\Rightarrow\quad x-1=\pm\sqrt{2}i \quad \xrightarrow[\text{両辺 2 乗する}]{} \quad (x-1)^2=(\pm\sqrt{2}i)^2$$

$$\Rightarrow\quad x^2-2x+1=-2 \quad\Rightarrow\quad x^2-2x+3=0$$

これより，x^3+ax^2+bx-6 は x^2-2x+3 で割り切れる。

右の計算により商と余りが求まる。

割り切れるので余りは 0 であるから

$$\begin{array}{r}
x\ +(a+2) \\
x^2-2x+3\,\big)\,\overline{x^3+ax^2+bx-6} \\
\underline{x^3-2x^2\ +3x} \\
(a+2)x^2\ +(b-3)x-6 \\
\underline{(a+2)x^2-2(a+2)x+3(a+2)} \\
\{(b-3)+2(a+2)\}x-6-3(a+2)
\end{array}$$

$\{(b-3)+2(a+2)\}x-6-3(a+2)=0$

$$\begin{cases} b+2a+1=0 \\ -3a-12=0 \end{cases}$$

これを解くと　$a=-4$，$b=7$

よって　$x^3-4x^2+7x-6=(x^2-2x+3)\{x+(-4+2)\}$

$=(x^2-2x+3)(x-2)=0$

したがって　**$a=-4$，$b=7$，他の解は $x=1-\sqrt{2}i$，2**

別解 1　$x=1+\sqrt{2}i$ を方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ に代入する。

$$\begin{aligned}
&(1+\sqrt{2}i)^3+a(1+\sqrt{2}i)^2+b(1+\sqrt{2}i)-6 \\
&=1^3+3\cdot1^2\cdot\sqrt{2}i+3\cdot1\cdot(\sqrt{2}i)^2+(\sqrt{2}i)^3+a\{1+2\sqrt{2}i+(\sqrt{2}i)^2\}+b+\sqrt{2}bi-6 \\
&=1+3\sqrt{2}i-6-2\sqrt{2}i+a+2\sqrt{2}ai-2a+b+\sqrt{2}bi-6 \\
&=-a+b-11+(2\sqrt{2}a+\sqrt{2}b+\sqrt{2})i=0
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} -a+b-11=0 \\ 2\sqrt{2}a+\sqrt{2}b+\sqrt{2}=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} -a+b-11=0 \\ 2a+b+1=0 \end{cases}$$

これを解くと　$a=-4$，$b=7$

方程式 $x^3-4x^2+7x-6=0$ を解くと　$x=2$，$1\pm\sqrt{2}i$

したがって　$a=-4$，$b=7$，他の解は $x=2$，$1-\sqrt{2}i$

別解 2　この方程式は $x=1-\sqrt{2}i$ も解にもつ。$\alpha=1+\sqrt{2}i$，$\beta=1-\sqrt{2}i$，$x=1\pm\sqrt{2}i$ 以外の解を γ とおき，3 次方程式の解と係数の関係を用いる。

$$\begin{cases}
(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+\gamma=-a & \cdots\cdots① \\
(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)\gamma+\gamma(1-\sqrt{2}i)\gamma=b & \cdots\cdots② \\
(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)\gamma=6 & \cdots\cdots③
\end{cases}$$

③より　$3\gamma=6$　よって　$\gamma=2$

①より　$2+2=-a$　　よって　$a=-4$

②より　$3+2(1-\sqrt{2}i)+2(1+\sqrt{2}i)=b$　よって　$b=7$

以上より　$a=-4$，$b=7$，他の解は $x=1-\sqrt{2}i$，2