微分法の応用

$\boxed{1}$

(1)　次の問いに答えよ。

①　曲線 $y=2^x$ 上の点(0，1)における接線と法線の方程式を求めよ。

②　原点から曲線 $y=2^x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

(2)　放物線 $y^2=4x$ 上の点(1，2)における接線の方程式を求めよ。

(3)　媒介変数θによって表された曲線$x=4\cos\theta$，$y=2\sin\theta$ 上の，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$に対応する点における接線の方程式を求めよ。

解答

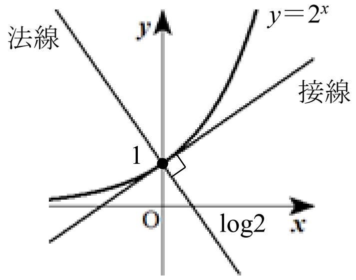
(1)　①　$f(x)=2^x$とおくと　$f'(x)=2^x\log 2$，$f'(0)=\log 2$

よって，**接線の方程式**は

$y-1=(\log 2)(x-0)$　　すなわち　$\boldsymbol{y=(\log 2)x+1}$

法線の方程式は

$y-1=-\dfrac{1}{\log 2}(x-0)$　　すなわち　$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{\log 2}x+1}$



②　曲線と，原点から曲線 $y=2^x$ に引いた接線の接点を$(a,\ 2^a)$とする。

このとき，接線の傾きは①より$2^a\log 2$であるから，接線の方程式は

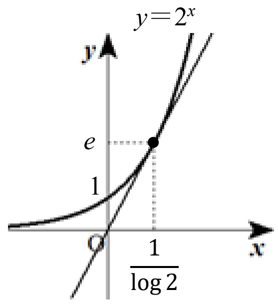
$y-2^a=2^a(\log 2)(x-a)$

すなわち　$y=2^a(\log 2)x+2^a-2^a(\log 2)a$　……$(*)$

$(*)$は原点を通るので　$0=2^a-(2^a\log 2)a$

よって　$0=2^a(1-a\log 2)$

$2^a\neq 0$ から　$1-a\log 2=0$　　よって　$a=\dfrac{1}{\log 2}$



ここで，$2^{\frac{1}{\log 2}}=b$とおいて，両辺の底を 2 とする対数を考えると

$\log_2 2^{\frac{1}{\log 2}}=\log_2 b$　　$\dfrac{1}{\log 2}=\log_2 b$　　$\dfrac{1}{\log 2}=\dfrac{\log b}{\log 2}$　　$b=e$

すなわち　$2^a=e$

したがって，$(*)$より，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{y=e(\log 2)x}$

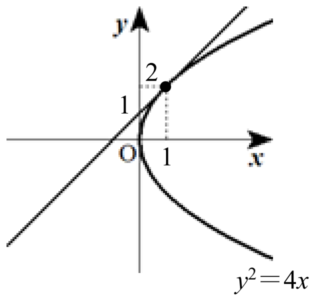
(2)　$y^2=4x$の両辺をxについて微分すると　$2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=4$

$y\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{2y}$　　すなわち　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$

点$(1,\ 2)$における接線の傾きは　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{2}=1$

よって，接線の方程式は　$y-2=1\cdot(x-1)$

すなわち　$\boldsymbol{y=x+1}$



(3)　接点は，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$に対応する点$(2,\ \sqrt{3})$である。

$$4\cos\frac{\pi}{3}=4\cdot\frac{1}{2}=2,$$

$$2\sin\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

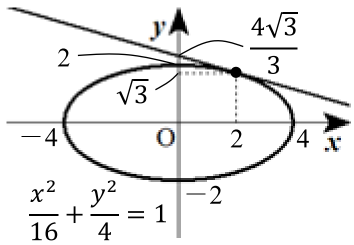
また，$\dfrac{dx}{d\theta}=-4\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=2\cos\theta$ であるから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{2\cos\theta}{-4\sin\theta}=-\frac{1}{2\tan\theta}$$

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2\tan\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

したがって，接線の方程式は　$y-\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x-2)$

すなわち　$\boldsymbol{y=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$



$\boxed{2}$

平均値の定理を用いて，次の不等式を証明せよ。

$$x > 0 \text{ のとき } \quad \frac{x}{x+1} < \log(x+1) < x$$

証明

関数$f(x) = \log x$は$x > 0$で微分可能で　$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$x>0$ のとき $x+1>1$ であるから，区間$[1,\ x+1]$において

平均値の定理により

$$\frac{\log(x+1) - \log 1}{(x+1) - 1} = \frac{1}{c}, \qquad 1 < c < x+1$$

を満たすcが存在する。ここで，

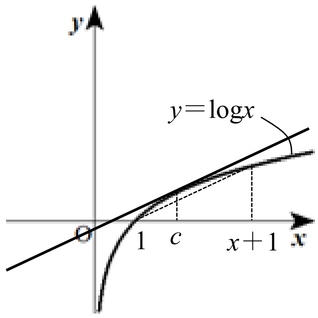
$$(x+1) - 1 = x, \quad \log(x+1) - \log 1 = \log(x+1), \quad \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < 1$$

であるから　$\dfrac{\log(x+1)}{x} = \dfrac{1}{c}, \qquad \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{c} < 1$

よって　$\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{\log(x+1)}{x} < 1$

$x > 0$ であるから　$\dfrac{x}{x+1} < \log(x+1) < x$

閉区間の定め方がポイントとなるが，与えられた不等式に$\log(x+1)$があること，$\log 1 = 0$であることから，区間$[1,\ x+1]$と見当をつける。



$\boxed{3}$

(1)　$f(x) = x - \log x$ の増減を調べよ。

(2)　次の関数の極値を求めよ。

①　$f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$　　　　　②　$f(x) = -\cos 2x - x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

(3)　関数$f(x) = \dfrac{x}{x^2 + a}$が$x = -2$ で極値をとるとき，定数aの値を求めよ。

また，このときの関数$f(x)$の極値を求めよ。

解答

(1)　関数$f(x)$の定義域は，$x>0$ である。

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 1$

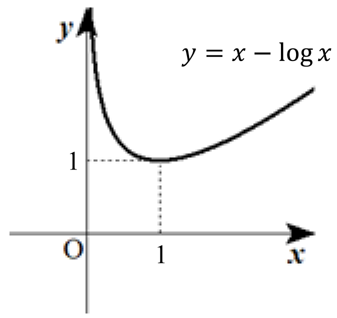
よって，$f(x)$の増減表は右のようになる。

したがって，$f(x)$は

$0 < x \leqq 1$で減少し，

$x \geqq 1$で増加する。

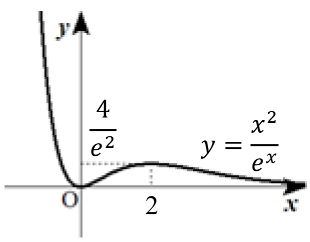
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	1	↗



(2)　①　$f'(x) = \dfrac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{x(2-x)e^x}{e^{2x}}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0$，2　　よって，$f(x)$の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘



したがって，$f(x)$は　**$x=0$ で極小値 0，**

$x = 2$で極大値$\boldsymbol{\dfrac{4}{e^2}}$　をとる。

② $f'(x)=-2\cdot(-\sin 2x)-1=2\sin 2x-1$

$f'(x)=0$ とすると　$\sin 2x=\dfrac{1}{2}$　　また，$0\leqq x\leqq\pi$より　$0\leqq 2x\leqq 2\pi$

よって　$2x=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$　　すなわち　$x=\dfrac{\pi}{12}$，$\dfrac{5}{12}\pi$

以上から，$f(x)$の増減表は次のようになる。

x	0	…	$\dfrac{\pi}{12}$	…	$\dfrac{5}{12}\pi$	…	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{12}$	↗	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{5}{12}\pi$	↘	$-1-\pi$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12},$$

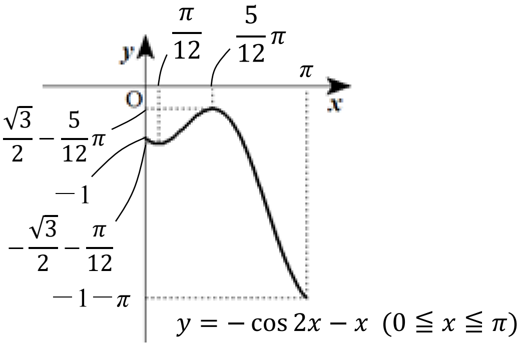
$$f\left(\frac{5}{12}\pi\right)=-\cos\frac{5}{6}\pi-\frac{5}{12}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{12}\pi$$

したがって，$f(x)$は

$$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{12}\text{で極小値}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12},}$$

$$\boldsymbol{x=\frac{5}{12}\pi\text{で極大値}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{12}\pi}$$

をとる。



(3)　関数$f(x)=\dfrac{x}{x^2+a}$ は$x=-2$ で極値をとるので，定義域に$x=-2$ を含む。

よって　$(-2)^2+a=4+a\neq 0$　　したがって　$a\neq -4$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+a)-x\cdot 2x}{(x^2+a)^2}=\frac{-x^2+a}{(x^2+a)^2}$$

$a\neq -4$ であるから，$f(x)$は $x=-2$ で微分可能である。よって　$f'(-2)=0$

すなわち　$\dfrac{-4+a}{(4+a)^2}=0$　　これを解くと　$a=4$

このとき　$f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$，　$f'(x)=\dfrac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2$，2　　よって，$f(x)$の増減表は次のようになる。

したがって，$x=-2$ で極小値をとるので，条件を満たす。

以上から　　$\boldsymbol{a=4}$

x	…	-2	…	2	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{1}{4}$	↗	$\dfrac{1}{4}$	↘

$$\boldsymbol{x=-2\text{で極小値}-\frac{1}{4},}$$

$$\boldsymbol{x=2\text{で極大値}\frac{1}{4}}\quad\text{をとる。}$$

$\boxed{4}$

(1)　曲線$y = xe^x$のグラフをかけ。また，変曲点があれば求めよ。ただし，$\lim_{x \to -\infty} y = 0$ であることは用いてもよい。

(2)　曲線$f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2$の極値を求めよ。

(3)　曲線$y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$の漸近線を求めよ。

解答

(1)　y'，y''を計算すると，次のようになる。

$$y' = (xe^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x,$$
$$y'' = \{(1+x)e^x\}' = 1 \cdot e^x + (1+x) \cdot e^x = (2+x)e^x$$

$y'=0$ とすると $x=-1$，　$y''=0$ とすると $x=-2$　　よって，y の増減と凹凸は次の表のようになる。

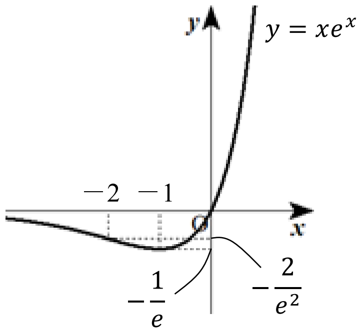
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	⤵	$-\dfrac{2}{e^2}$	↘	$-\dfrac{1}{e}$	⤴

ここで，$\lim_{x \to -\infty} y = 0$ より，x軸は漸近線である。

以上のことから，グラフは右の図のようになる。

また，変曲点は　**点$\left(-2,\ -\dfrac{2}{e^2}\right)$**

$x=0$ のとき
$y=0$



(2)　$f'(x) = x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2$，0，2

また，$f''(x) = (x^3-4x)' = 3x^2-4$ であるから　　$f''(-2)=8>0$，　$f''(0)=-4<0$，　$f''(2)=8>0$

よって，$x=-2$，2 で極小となり，**極小値は**　$f(-2) = f(2) = \dfrac{1}{4} \cdot 16 - 2 \cdot 4 = \mathbf{-4}$，

$x=0$ で極大となり，**極大値は**　$f(0) = \mathbf{0}$

(3) (ⅰ) $\lim_{x\to\pm\infty} y$ は極限値をもたないから，x軸に平行な漸近線はない。

(ⅱ) $\lim_{x\to 1+0} y=\infty$，$\lim_{x\to 1-0} y=-\infty$であるから，直線$x$＝1 は漸近線となる。

(ⅲ) $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ を満たすa，bが存在するとして，

a＝$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}$とする。

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{1-\frac{1}{x}}=1$$

$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ を満たすa，bも，$a=1$，$b=1$ である。

よって，直線 y＝x＋1 は漸近線となる。

以上から，漸近線は　**直線 $\boldsymbol{x}$＝1，　$\boldsymbol{y}$＝$\boldsymbol{x}$＋1**

5

x の関数 y が，θ を媒介変数として　$x=2\cos\theta-\cos 2\theta$，$y=2\sin\theta-\sin 2\theta$ で表されるとき，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ におけるグラフの概形をかけ。ただし，凹凸は調べなくてよい。

解答

$$\frac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta+2\sin 2\theta=-2\sin\theta+4\sin\theta\cos\theta=-2\sin\theta(1-2\cos\theta),$$

$$\frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta-2\cos 2\theta=2\cos\theta-2(2\cos^2\theta-1)=-2(2\cos^2\theta-\cos\theta-1)$$

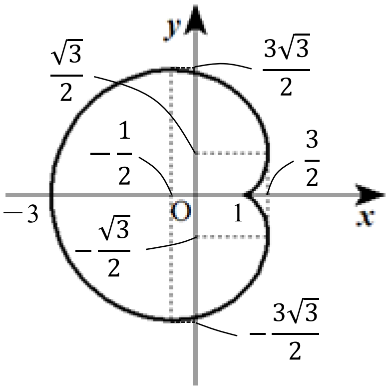
$$=-2(\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)$$

$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ とすると $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi,\ 2\pi$，　$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とすると $\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi$

よって，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ における θ の値の変化に対応した x，y の値の変化は次の表のようになる。

θ	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π	…	$\frac{4}{3}\pi$	…	$\frac{5}{3}\pi$	…	2π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	＋	0	－	－	－	0	＋	＋	＋	0	－	0
x	1	→	$\frac{3}{2}$	←	$-\frac{1}{2}$	←	-3	→	$-\frac{1}{2}$	→	$\frac{3}{2}$	←	1
$\frac{dy}{d\theta}$	0	＋	＋	＋	0	－	－	－	0	＋	＋	＋	0
y	0	↑	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↑	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↓	0	↓	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↑	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↑	0

よって，グラフの概形は右のようになる。



$\boxed{6}$
$x \geqq 0$ のとき，不等式 $\log(x+1) \leqq \sqrt{x}$ が成り立つことを証明せよ。

証明

$f(x) = \log(x+1) - \sqrt{x}$ とおくと

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - (x+1)}{2\sqrt{x}(x+1)} = \frac{-\left\{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x} + 1\right\}}{2\sqrt{x}(x+1)} = \frac{-\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}{2\sqrt{x}(x+1)}$$

$f'(x) = 0$ とすると　$\sqrt{x} - 1 = 0$　　すなわち　$x = 1$

よって，$f(x)$の増減表は右のようになる。

x	0	…	1	…
$f'(x)$		－	0	－
$f(x)$	0	↘	log2－1	↘

関数 $f(x)$は，x≧0 で減少するから，

x＝0 のとき最大値 0 をとる。

したがって　　$f(x)$≦0　(x≧0)

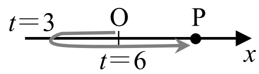
以上から，$x \geqq 0$ のとき　$\log(x+1) \leqq \sqrt{x}$

等号が成り立つのは，x＝0 のときである。

$\boxed{7}$

(1)　次の問いに答えよ。

①　数直線上の動点 P の座標 x が，時刻 t の関数として
$x=t^2-6t$　と表されるとき，点 P の時刻 $t=3$，$t=6$ における速さ，および加速度の大きさを求めよ。



②　座標平面上を運動する点 P の座標が，時刻 t の関数として次の式で表されるとする。

$$x=t+\frac{1}{t},\quad y=t-\frac{1}{t}$$

このとき，速度$\vec{v}$と加速度$\vec{\alpha}$，および$t=1$における点 P の速さと加速度の大きさを求めよ。

(2)　体積が $\pi\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ の割合で増加している球がある。
球の半径が 2cm になる瞬間において，球の表面積が増加する割合（速度）を求めよ。

解答

(1)　①　速度v，加速度αとすると　$\boldsymbol{v=\frac{dx}{dt}=2t-6,\quad \alpha=\frac{dv}{dt}=2}$

よって，**$t=3$ のときの速さ $|v|$ と加速度の大きさ $|\alpha|$** は　$|v|=2\cdot3-6=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{|\alpha|=2}$

また，**$t=6$ のとき**は　$|v|=2\cdot6-6=\mathbf{6}$，$\boldsymbol{|\alpha|=2}$

②　$\dfrac{dx}{dt}=1+\dfrac{-1}{t^2}=1-\dfrac{1}{t^2}$，　$\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{-1}{t^2}=1+\dfrac{1}{t^2}$，

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0-\dfrac{-2t}{t^4}=\dfrac{2}{t^3}$，　$\dfrac{d^2y}{dt^2}=0+\dfrac{-2t}{t^4}=-\dfrac{2}{t^3}$

よって　$\boldsymbol{\vec{v}=\left(1-\frac{1}{t^2},\ 1+\frac{1}{t^2}\right),\quad \vec{\alpha}=\left(\frac{2}{t^3},\ -\frac{2}{t^3}\right)}$

また，速さを$|\vec{v}|$，加速度の大きさを$|\vec{\alpha}|$とすると

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}+1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}}=\sqrt{2+\frac{2}{t^4}}$$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{t^3}\right)^2+\left(-\frac{2}{t^3}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{t^6}}=\frac{2\sqrt{2}}{t^3}$$

したがって，**$t=1$における点Pの速さ**は　$\sqrt{2+\frac{2}{1^4}}=\mathbf{2}$，　**加速度の大きさ**は　$\frac{2\sqrt{2}}{1^3}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

(2)　球の半径を $r$cm，表面積を Scm²，体積を Vcm³ とすると

$$S = 4\pi r^2,\quad V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

球の体積は

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

身(3)の上に心配(4π)

ある(r), 参上(3 乗)した。

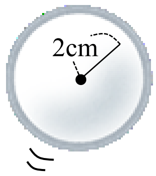
r，S，V は時刻 t の関数であるから，

上の両辺を t で微分すると

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt}\quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}\quad \cdots\cdots ②$$

条件より，$\frac{dV}{dt} = \pi$であるから，$r = 2$ のときの$\frac{dr}{dt}$は，②より



$$\pi = 4\pi \cdot 2^2 \cdot \frac{dr}{dt}\qquad \text{よって}\quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{16}$$

求める表面積が増加する割合(速度)は，$\frac{dS}{dt}$ であるから，①より

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{16} = \boldsymbol{\pi}\ (\mathbf{cm^2/s})$$

$\boxed{8}$

次の問いに答えよ。

(1)　x が 0 に十分近いとき，次の式の 1 次の近似式を作れ。

①　$\dfrac{1}{1+x}$　　　　　　②　e^x

(2)　次の数の近似値を求めよ。

①　$\dfrac{1}{0.99}$　　　　　　②　$e^{0.01}$

解答

(1)　①　$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$ であるから　$f(0)=1$，$f'(0)=-1$

したがって，xが 0 に十分近いとき　$\dfrac{1}{1+x}\fallingdotseq \mathbf{1-x}$

②　$f(x)=e^x$ とおくと　$f'(x)=e^x$ であるから　$f(0)=1$，$f'(0)=1$

したがって，x が 0 に十分近いとき　$e^x\fallingdotseq \mathbf{1+x}$

(2)　①　(1) ①より，xが 0 に十分近いとき　$\dfrac{1}{1+x}\fallingdotseq 1-x$

-0.01 は 0 に十分近いので　$\dfrac{1}{0.99}=\dfrac{1}{1+(-0.01)}\fallingdotseq 1-(-0.01)=\mathbf{1.01}$

②　(1) ②より，x が 0 に十分近いとき　$e^x\fallingdotseq 1+x$

0.01 は 0 に十分近いので　$e^{0.01}\fallingdotseq 1+0.01=\mathbf{1.01}$