微分法（導関数の計算）

$\boxed{1}$

(1)　関数$f(x) = \dfrac{3}{x+1}$の，$x = 2$ における微分係数を求めよ。

(2)　関数$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x+1} & (x \geqq 0) \\ \dfrac{1}{2}x^2 + x + 2 & (x < 0) \end{cases}$ について，次の問いに答えよ。

①　x＝0 において連続かどうかを調べよ。

②　x＝0 において微分可能かどうかを調べよ。

解答

(1)　$\boldsymbol{f'(2)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{3}{2+h+1} - \dfrac{3}{2+1}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{3-(3+h)}{3+h}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{-h}{3+h}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{3+h}$

$= \boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$

(2)　①　$\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} 2\sqrt{x+1} = 2,\qquad \lim\limits_{x \to -0} f(x) = \lim\limits_{x \to -0} \left(\dfrac{1}{2}x^2 + x + 2\right) = 2$

また，$f(0) = 2$ であるから，$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$が成り立つ。

よって，関数 $f(x)$は x＝0 において **連続である。**

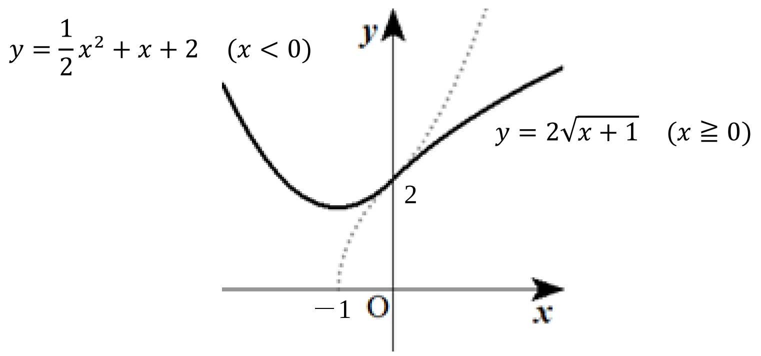
②　$\lim\limits_{h \to +0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to +0} \dfrac{2\sqrt{h+1} - 2}{h} = \lim\limits_{h \to +0} \dfrac{2\left(\sqrt{h+1} - 1\right)\left(\sqrt{h+1} + 1\right)}{h\left(\sqrt{h+1} + 1\right)}$

$= \lim\limits_{h \to +0} \dfrac{2\{(h+1) - 1\}}{h\left(\sqrt{h+1} + 1\right)} = \lim\limits_{h \to +0} \dfrac{2}{\sqrt{h+1} + 1} = \dfrac{2}{1+1} = 1,$

$\lim\limits_{h \to -0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to -0} \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}h^2 + h + 2\right) - 2}{h} = \lim\limits_{h \to -0} \left(\dfrac{1}{2}h + 1\right) = 1$

であるから，$f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1$ である。

よって，関数 $f(x)$は x＝0 において **微分可能である。**



$\boxed{2}$
次の関数を，導関数の定義に従って微分せよ。

(1)　$y=\dfrac{3}{x+1}$　　(2)　$y=2\sqrt{x+1}$

解答

(1)　$$\boldsymbol{y'}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{3}{x+h+1}-\dfrac{3}{x+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{3(x+1)-3(x+h+1)}{(x+h+1)(x+h)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-3h}{(x+h+1)(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-3}{(x+h+1)(x+h)}=-\boldsymbol{\frac{3}{(x+1)^2}}$$

(2)　$$\boldsymbol{y'}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sqrt{x+h+1}-2\sqrt{x+1}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\left(\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}\right)}{h\left(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{2\{(x+h+1)-(x+1)\}}{h\left(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}\right)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}$$

$\boxed{3}$

(1)　関数 $y=(x^2-2)(3x^3+1)$を微分せよ。

(2)　次の関数を微分せよ。

①　$y=\dfrac{3}{x+1}$　　　　②　$y=\dfrac{3x-4}{x}$

解答

(1)　$\boldsymbol{y'}=\{(x^2-2)(3x^3+1)\}'$

$=(x^2-2)'\cdot(3x^3+1)+(x^2-2)\cdot(3x^3+1)'$

$=2x\cdot(3x^3+1)+(x^2-2)\cdot 9x^2$

$=6x^4+2x+9x^4-18x^2$

$=\boldsymbol{15x^4-18x^2+2x}$

(2)　①　$\boldsymbol{y'}=\left(\dfrac{3}{x+1}\right)'=\dfrac{(3)'\cdot(x+1)-3\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{0-3\cdot 1}{(x+1)^2}=-\dfrac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{(x+1)^2}}$

②　$\boldsymbol{y'}=\left(\dfrac{3x-4}{x}\right)'=\dfrac{(3x-4)'\cdot x-(3x-4)\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{3x-(3x-4)}{x^2}=\dfrac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{x^2}}$

別解　$\dfrac{3x-4}{x}=3-\dfrac{4}{x}=3-4x^{-1}$ とみると

$$y'=\left(\frac{3x-4}{x}\right)'=(3-4x^{-1})'=0-(-1)\cdot 4x^{-1-1}=4x^{-2}=\frac{4}{x^2}$$

$\boxed{4}$

関数$y = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$を微分せよ。

解答

$$\boldsymbol{y'} = \left\{\frac{1}{(x^2+1)^2}\right\}' = \{(x^2+1)^{-2}\}'$$

$$= -2(x^2+1)^{-2-1} \cdot (x^2+1)'$$

$$= -2(x^2+1)^{-3} \cdot 2x$$

$$= -\boldsymbol{\frac{4x}{(x^2+1)^3}}$$

$u = g(x) = x^2+1$ とおくと，$y = \dfrac{1}{\{g(x)\}^2} = u^{-2} = f(u)$

であるから　　$y' = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$

5

関数$y=\sqrt[4]{x}$ を微分せよ。

解答

$y=\sqrt[4]{x}$ より　$y^4=x$

逆関数の微分法により　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{4y^3}=\dfrac{1}{4\left(\sqrt[4]{x}\right)^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}$

別解　$y=\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}$ より

$$y'=\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

$\boxed{6}$

次の関数を微分せよ。

(1)　$y = \sin x - x\cos x$　　　　(2)　$y = \tan^2 x$

解答

(1)　$y' = (\sin x - x\cos x)' = \cos x - \{(x)'\cos x + x(\cos x)'\} = \cos x - 1 \cdot \cos x - x \cdot (-\sin x) = \boldsymbol{x\sin x}$

(2)　$y' = (\tan^2 x)' = 2\tan x \cdot (\tan x)' = 2 \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \boldsymbol{\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}}$

$\boxed{7}$

(1)　次の関数を微分せよ。

①　$y=\log|\log x|$　　②　$y=x\log x-x$　　③　$y=\log_2(x^2+2)$

(2)　関数$y=\dfrac{(x+3)^2}{(x-1)(2x-1)}$を微分せよ。

(3)　次の関数を微分せよ。

①　$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$　　②　$y=3^{3x-1}$

解答

(1)　①　$\boldsymbol{y'}=(\log|\log x|)'=\dfrac{(\log x)'}{\log x}=\boldsymbol{\dfrac{1}{x\log x}}$

②　$\boldsymbol{y'}=(x\log x-x)'=(x)'\log x+x(\log x)'-1=1\cdot\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1=\boldsymbol{\log x}$

③　$\boldsymbol{y'}=\{\log_2(x^2+2)\}'=\dfrac{(x^2+2)'}{(x^2+2)\log 2}=\boldsymbol{\dfrac{2x}{(x^2+2)\log 2}}$

(2)　$y=\dfrac{(x+3)^2}{(x-1)(2x-1)}$ の両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y|=\log\left|\frac{(x+3)^2}{(x-1)(2x-1)}\right|=2\log|x+3|-\log|x-1|-\log|2x-1|$$

両辺を x について微分すると

$$\frac{y'}{y}=2\cdot\frac{(x+3)'}{x+3}-\frac{(x-1)'}{x-1}-\frac{(2x-1)'}{2x-1}=\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x-1}$$

$$=\frac{2(x-1)(2x-1)-(x+3)(2x-1)-2(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-1)(2x-1)}$$

$$=\frac{2(2x^2-3x+1)-(2x^2+5x-3)-2(x^2+2x-3)}{(x+3)(x-1)(2x-1)}$$

$$=\frac{4x^2-6x+2-2x^2-5x+3-2x^2-4x+6}{(x+3)(x-1)(2x-1)}=\frac{-15x+11}{(x+3)(x-1)(2x-1)}$$

よって　$\boldsymbol{y'}=\dfrac{-15x+11}{(x+3)(x-1)(2x-1)}\cdot\dfrac{(x+3)^2}{(x-1)(2x-1)}=\boldsymbol{-\dfrac{(x+3)(15x-11)}{(x-1)^2(2x-1)^2}}$

(3)　①　$\boldsymbol{y'}=\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)'=\dfrac{(e^x-e^{-x})'\cdot(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})\cdot(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2}$

$$=\frac{\{e^x-(-e^{-x})\}(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})\cdot(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+2e^x\cdot e^{-x}+e^{-2x}-(e^{2x}-2e^x\cdot e^{-x}+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{2+2}{(e^x+e^{-x})^2}=\boldsymbol{\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}}$$

②　$\boldsymbol{y'}=(3^{3x-1})'=3^{3x-1}\cdot\log 3\cdot(3x-1)'=3\cdot 3^{3x-1}\log 3=\boldsymbol{3^{3x}\log 3}$

$\boxed{8}$

(1)　次の関数の第 2 次導関数，第 3 次導関数を求めよ。

①　$y=e^{-x}$　　②　$y=x^2\log x$　　③　$y=\sin x^2$

(2)　関数$y=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ は，等式$y'y''=\dfrac{1}{2}$を満たすことを示せ。

(3)　関数$y=\dfrac{1}{x}$ の第n次導関数を求めよ。

解答

(1)　①　$y'=(e^{-x})'=-e^{-x}$，　$\boldsymbol{y''}=(-e^{-x})'=-(-e^{-x})=\boldsymbol{e^{-x}}$，　$\boldsymbol{y'''}=(e^{-x})'=\boldsymbol{-e^{-x}}$

②　$y'=(x^2\log x)'=(x^2)'\log x+x^2(\log x)'=2x\log x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=2x\log x+x,$

$$\boldsymbol{y''}=(2x\log x+x)'=(2x)'\log x+2x(\log x)'+(x)'=2\log x+2x\cdot\frac{1}{x}+1=\boldsymbol{2\log x+3},$$

$$\boldsymbol{y'''}=(2\log x+3)'=\boldsymbol{\frac{2}{x}}$$

③　$y'=(\sin x^2)'=\cos x^2\cdot(x^2)'=2x\cos x^2,$

$\boldsymbol{y''}=(2x\cos x^2)'=(2x)'\cos x^2+2x(\cos x^2)'=2\cos x^2+2x\{-\sin x^2\cdot(x^2)'\}$

$=2\cos x^2+2x\cdot(-2x\sin x^2)=\boldsymbol{2\cos x^2-4x^2\sin x^2},$

$\boldsymbol{y'''}=(2\cos x^2-4x^2\sin x^2)'=-2\sin x^2\cdot(x^2)'-\{(4x^2)'\sin x^2+4x^2(\sin x^2)'\}$

$=-4x\sin x^2-8x\sin x^2-4x^2\cdot\cos x^2\cdot(x^2)'=\boldsymbol{-12x\sin x^2-8x^3\cos x^2}$

(2)　$y=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$，　$y'=\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right)'=\left(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}-1}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$，

$$y''=\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

よって　$y'y''=\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$

(3)　$y=\dfrac{1}{x}$，　$y'=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-x^{-2}$，　$y''=(-x^{-2})'=2x^{-3}$，　$y'''=(2x^{-3})'=-6x^{-4}$，　……

よって，　$y^{(n)}=(-1)^n n!\,x^{-(n+1)}$　……①

と推測できる。これを，数学的帰納法を用いて示す。

(ⅰ)　$n=1$ のとき，　$y^{(1)}=y'=-x^{-2}=(-1)^1 1!\,x^{-(1+1)}$より，①は成り立つ。

(ⅱ)　$n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると　$y^{(k)}=(-1)^k k!\,x^{-(k+1)}$

ここで，$n=k+1$ のときを考えると

$y^{(k+1)}=\{y^{(k)}\}'=\{(-1)^k k!\,x^{-(k+1)}\}'=-(k+1)\cdot(-1)^k k!\,x^{-(k+1)-1}$

$=(-1)^{k+1}(k+1)!\,x^{-(k+1+1)}$

よって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

(ⅰ)，(ⅱ)から，すべての自然数 n について，①は成り立つので　$\boldsymbol{y^{(n)}=(-1)^n n!\,x^{-(n+1)}}$

$\boxed{9}$

(1)　円の方程式$x^2+y^2=1$で定められるxの関数yの導関数$\dfrac{dy}{dx}$を，x，yを用いて表せ。

(2)　x，yが，媒介変数tを用いて次の式で表されるとき，xの関数yの導関数$\dfrac{dy}{dx}$をtを用いて表せ。

①　$x=t^2$,　　$y=t^3$

②　$x=\cos t$,　　$y=\sin t$

解答

(1)　方程式$x^2+y^2=1$の両辺をxで微分すると　$\dfrac{d}{dx}x^2+\dfrac{d}{dx}y^2=\dfrac{d}{dx}(1)$　よって　$2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

したがって，$y\neq 0$のとき　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}}$

(2)　①　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d}{dt}t^2=2t$,　　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}t^3=3t^2$であるから，$t\neq 0$のとき　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2}{2t}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}t}$

②　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d}{dt}(\cos t)=-\sin t$,　　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}(\sin t)=\cos t$

であるから，$\sin t\neq 0$のとき　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t}{-\sin t}=\boldsymbol{-\dfrac{\cos t}{\sin t}}$