

場合の数

1

50 人の中で、コーヒーが好きな人が 27 人、紅茶が好きな人が 15 人、コーヒーと紅茶のどちらも好きでない人が 12 人いた。コーヒーと紅茶の両方好きな人は何人か。

解答

全体集合を U とし、そのうち

コーヒーが好きな人の集合を A

紅茶が好きな人の集合を B

とする。このとき $n(U)=50, n(A)=27, n(B)=15, n(\overline{A \cup B})=12$

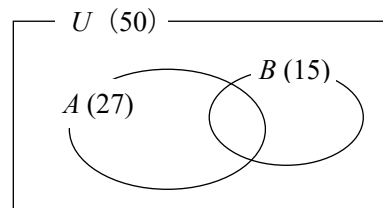
求める個数は $n(A \cap B)$ であるから、これを x 人とおくと

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 27 + 15 - x$$

また $n(A \cup B) = n(U) - n(\overline{A \cup B}) = 50 - 12$

よって $50 - 12 = 27 + 15 - x$

したがって、求める人数は $x=4$ (人)



2

次の問いに答えよ。

- (1) 100 円硬貨、50 円硬貨、10 円硬貨を用いて、200 円を支払う方法は何通りあるか。ただし、それぞれの硬貨は十分枚数があるものとし、用いない硬貨があってもよいものとする。
- (2) A 県から B 県へ行くのに、バス、電車、飛行機の 3 つの交通手段がある。A 県から B 県へ行って帰るのに、何通りの方法があるか。ただし、往復で同じ交通手段を利用してもよいものとする。

解答

(1) 200 円を支払う方法は、右の樹形図のようになる。

(i) 100 円硬貨が 2 枚のとき

右の図から 1 通り

(ii) 100 円硬貨が 1 枚のとき

右の図から 3 通り

(iii) 100 円硬貨が 0 枚のとき

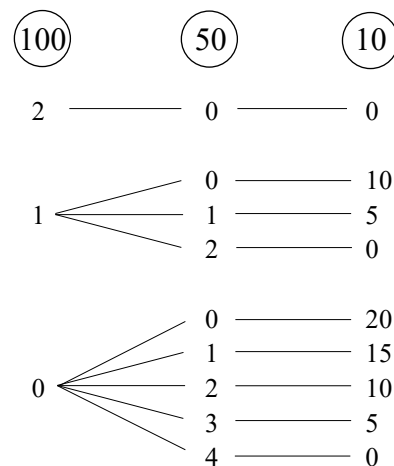
右の図から 5 通り

(i)~(iii) の場合は同時に起こらないから、求める

場合の数は

$$1 + 3 + 5 = 9 \text{ (通り)}$$

金額が大きいものから考えると、場合分けが少なくてすむ。



数字は用いた枚数を表す。

(2) 求める選び方の総数は、積の法則により

$$3 \times 3 = 9 \text{ (通り)}$$

3

60の正の約数は全部で何個あるか。また、その約数の和を求めよ。

解答

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

これから、60の正の約数は $(2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1)(5^0 + 5^1)$ を展開した項にすべて現れる。

よって、求める正の約数の個数は $(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$ (個)

約数の和は $(1+2^1+2^2)(1+3^1)(1+5^1) = (1+2+4)(1+3)(1+5) = 7 \times 4 \times 6 = 168$

4

次の問いに答えよ。

- (1) 7個の整数1, 2, 3, 4, 5, 6, 7から、異なる3個を取り出して1列に並べたときできる3桁の整数は全部で何個あるか。また、このうち奇数は何個あるか。
- (2) 6個の整数0, 1, 2, 3, 4, 5から、異なる4個を取り出して1列に並べたときできる4桁の整数は全部で何個あるか。
- (3) 男子3人, 女子3人の計6人が1列に並ぶとき、女子3人が隣り合う並び方は全部で何通りあるか。また、男子が両端にくるような並び方は全部で何通りあるか。

解答

(1) 7個の整数から異なる3個を取って並べたときにできる3桁の整数は ${}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ (個)

また、このうち奇数は、一の位が1, 3, 5, 7のいずれかで 4通り

そのおのおのに対して、百, 十の位は残り6個から2個を取る順列であるから ${}_6P_2$ 通り

よって、求める個数は $4 \times {}_6P_2 = 4 \times 6 \times 5 = 120$ (個)

(2) 千の位は、0を除く1~5から1個取るから 5通り

そのおのおのに対して、百, 十, 一の位は、0を含めた残り5個から3個を取る順列であるから ${}_5P_3$ 通り

よって、求める個数は $5 \times {}_5P_3 = 5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$ (個)

別解 0~5の6個の整数から4個取って並べる順列の総数は ${}_6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ (個)

このうち、1番目の整数が0であるものは ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (個)

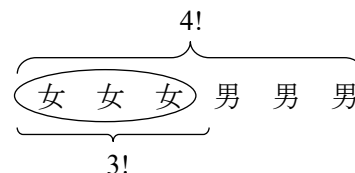
よって、求める個数は $360 - 60 = 300$ (個)

(3) 女子3人をまとめて1組と考える。

女子3人の1組と男子3人の並び方は $4!$ 通り

女子3人の並び方は $3!$ 通り

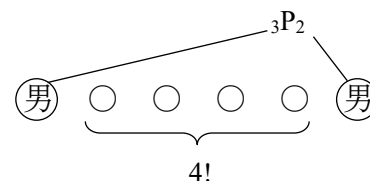
よって、求める並び方は $4! \times 3! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 144$ (通り)



また、男子が両端に並ぶ並び方は ${}_3P_2$ 通り

残り4人の並び方は $4!$ 通り

よって、求める並び方は ${}_3P_2 \times 4! = 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 144$ (通り)



5 次の問いに答えよ。

- (1) 異なる7個のビーズを円形に並べる方法は何通りあるか。
- (2) 異なる7個のビーズに糸を通して輪を作るとき、何通りの作り方があるか。
- (3) 立方体の各面を、異なる6色すべてを使って塗る方法は何通りあるか。ただし、立方体を回転させて一致する塗り方は同じとみなす。

解答

(1) 異なる7個のビーズを円形に並べる方法は

$$\frac{{}_7P_7}{7} = (7-1)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \text{ (通り)}$$

(2) ビーズに糸を通した輪は、裏返すと同じになるから

$$\frac{(7-1)!}{2} = 360 \text{ (通り)}$$

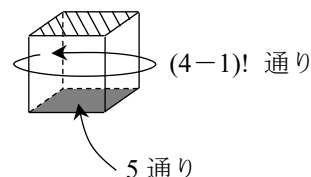
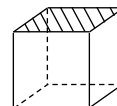
(3) まず、上面の色を固定する。

このとき、下面の色は残りの色で 5通り

そのおのおのについて、側面の塗り方は、異なる4個の円順列であるから $(4-1)!$ 通り

よって、求める方法は

$$5 \times (4-1)! = 5 \times 3! = 5 \times 3 \times 2 \times 1 = 30 \text{ (通り)}$$



6

- (1) 4種類の数字0, 1, 2, 3を使ってできる3桁の整数は何個あるか。ただし、同じ数字を繰り返して使ってもよい。
- (2) 6人を2つの部屋A, Bに分けるときの、どの部屋も1人以上になる分け方は全部で何通りあるか。

解答

(1) 百の位に使える数字は、1, 2, 3の3通り

十の位、一の位に使える数字は、それぞれ0, 1, 2, 3の4通り

よって、求める個数は $3 \times 4^2 = 48$ (個)

(2) 空き部屋ができてよいとすると、A, Bの2つの部屋に6人を分ける方法は

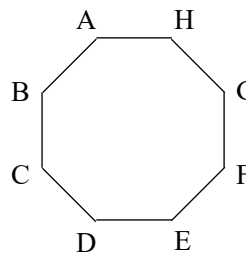
$$2^6 = 64 \text{ (通り)}$$

このうち、A, Bの一方だけに入る方法は 2通り

よって、求める分け方は $64 - 2 = 62$ (個)

7 次の問いに答えよ。

- (1) 9人から6人を選ぶ選び方は何通りあるか。
 (2) 正八角形 ABCDEFGH の3つの頂点を選んで三角形を作るとき、全部で何個できるか。また、正八角形と辺を共有しないものは何個できるか。



解答

(1) ${}^9C_6 = {}^9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ (通り)

(2) 8つの頂点から3つの頂点を選んで作った三角形は ${}^8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ (個)

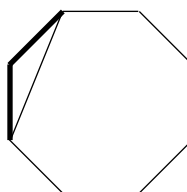
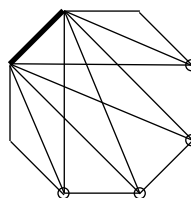
また、正八角形と1辺だけを共有する三角形は、各辺に対し辺の両端および両隣を除く頂点を選べばよいから

$$(8-4) \times 8 = 32 \text{ (個)}$$

正八角形と2辺を共有する三角形は、隣り合う2辺でできる三角形であるから 8個

以上から、求める三角形の個数は

$$56 - (32 + 8) = 16 \text{ (個)}$$



8

8人を次のように分ける方法は何通りあるか。

- (1) 2人ずつ、A, B, C, Dの4組に分ける。
 (2) 2人ずつ4組に分ける。
 (3) 3人, 3人, 2人の3組に分ける。

解答

(1) Aに入れる2人を選ぶ選び方は 8C_2 通り

残りの6人からBに入れる2人を選ぶ選び方は 6C_2 通り

残りの4人からCに入れる2人を選ぶ選び方は 4C_2 通り

Dには残りの2人が入るから、求める分け方は

$${}^8C_2 \times {}^6C_2 \times {}^4C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \times \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 2520 \text{ (通り)}$$

(2) (1)で, A, B, C, D の区別をなくすと, 同じものが 4! 通りずつできるから, 求める分け方は

$$\frac{{}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2}{4!} = \frac{2520}{24} = 105 \text{ (通り)}$$

(3) 3人, 3人, 2人を, A, B, C の3組に分ける方法は

$${}_8C_3 \times {}_5C_3 = {}_8C_3 \times {}_5C_2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 560 \text{ (通り)}$$

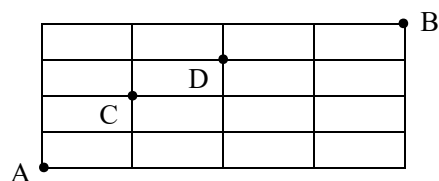
A, B の区別をなくすと, 同じものが 2! 通りずつできるから, 求める分け方は

$$\frac{{}_8C_3 \times {}_5C_3}{2!} = \frac{560}{2} = 280 \text{ (通り)}$$

9

右の図において, A 地点から B 地点まで最短の道を行くとき, 次の場合は何通りの道順があるか。

- (1) 全部の道順
- (2) C 地点を通る道順
- (3) C 地点と D 地点の両方を通らない道順



解答

(1) 上へ1区画進むことを↑, 右へ1区画進むことを→で表す。最短の道順は, ↑4個, →4個の順列で

表されるから $\frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \text{ (通り)}$

(2) A 地点から C 地点までの最短の道順は, ↑2個, →1個の順列で表されるから $\frac{3!}{2!1!}$ 通り

C 地点から B 地点までの最短の道順は, ↑2個, →3個の順列で表されるから $\frac{5!}{2!3!}$ 通り

よって, 求める道順は $\frac{3!}{2!1!} \times \frac{5!}{2!3!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \times 10 = 30 \text{ (通り)}$

(3) (C 地点と D 地点の両方を通らない道順) = (全部の道順) - (C 地点または D 地点を通る道順)

ここで (C 地点または D 地点を通る道順) = (C 地点を通る道順) + (D 地点を通る道順)

- (C 地点と D 地点を通る道順)

まず, D 地点を通る道順を求める。

A 地点から D 地点は ↑3個, →2個で $\frac{5!}{3!2!}$ 通り

D 地点から B 地点は ↑1個, →2個で $\frac{3!}{1!2!}$ 通り

よって $\frac{5!}{3!2!} \times \frac{3!}{1!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \times 3 = 30 \text{ (通り)}$

Math-Aquarium 【練習問題＋解答】 場合の数

次に、C 地点と D 地点を通る道順を求める。

A 地点から C 地点は ↑ 2 個，→ 1 個で $\frac{3!}{2!1!}$ 通り

C 地点から D 地点は ↑ 1 個，→ 1 個で $\frac{2!}{1!1!}$ 通り

D 地点から B 地点は ↑ 1 個，→ 2 個で $\frac{3!}{1!2!}$ 通り

よって $\frac{3!}{2!1!} \times \frac{2!}{1!1!} \times \frac{3!}{1!2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} \times \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \times 2 \times 3 = 18$ (通り)

以上から、求める道順は $70 - (30 + 30 - 18) = 28$ (通り)

10 次の問いに答えよ。

(1) $x + y + z = 8$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ を満たす整数の組 (x, y, z) は、全部で何組あるか。

(2) $l + m + n = 8$ を満たす自然数の組 (l, m, n) は、全部で何組あるか。

解答

(1) 異なる 3 種類のものから、重複を許して 8 個取る組合せの総数であるから

$${}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \text{ (組)}$$

別解 8 個の○と 2 つの仕切り | を考え、例えば

○○ | ○○○ | ○○○ は $(x, y, z) = (2, 3, 3)$

| ○○○○○ | ○○○ は $(x, y, z) = (0, 5, 3)$

を表す、と考えればよいから、求める (x, y, z) の組の総数は

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \text{ (組)}$$

(2) l, m, n は自然数であるから、 $l \geq 1, m \geq 1, n \geq 1$ であり、0 とはならない。そこで、

$$l - 1 = X, m - 1 = Y, n - 1 = Z$$

とおき、0 以上の整数 $X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0$ について考える。 $l = X + 1, m = Y + 1, n = Z + 1$ を与えられた方程式に代入すると

$$(X + 1) + (Y + 1) + (Z + 1) = 8 \quad \text{すなわち} \quad X + Y + Z = 5, X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0$$

異なる 3 種類のものから、重複を許して 5 個取る組合せの総数であるから

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \text{ (組)}$$

別解 8 個の○を並べたとき、その間の 7 か所に 2 つの仕切り | を入れることを考える。

例えば ○○ | ○○○ | ○○○ は $(x, y, z) = (2, 3, 3)$

を表す、と考えればよいから、求める (x, y, z) の組の総数は

$${}_7C_2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \text{ (組)}$$

研究 1

A, B, C, D, E, F の 6 人が 1 列に並ぶとき, A, B, C の 3 人が隣り合わないような並び方は全部で何通りあるか。

解答

まず, D, E, F の 3 人を並べる。

次に, その間または両端である $\boxed{1} \sim \boxed{4}$ に A, B, C を並べれば, A, B, C が隣り合うことはない。

$\boxed{1}$ \textcircled{D} $\boxed{2}$ \textcircled{E} $\boxed{3}$ \textcircled{F} $\boxed{4}$

D, E, F の 3 人の並び方は $3!$ 通り

$\boxed{1} \sim \boxed{4}$ に A, B, C が並ぶ並び方は ${}_4P_3$ 通り

よって, 求める並び方は $3! \times {}_4P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 = 144$ (通り)

研究 2 順序が定まった順列

M, O, U, N, T, A, I, N の 8 文字を横 1 列に並べるとき, O, U, A, I がこの順に並ぶ並び方は何通りあるか。

解答

O, U, A, I を同じもの, すなわち, 4 個の \square とみる。

\square : 4 個, M : 1 個, N : 2 個, T : 1 個を横 1 列に並べ, 4 個の \square に左から O, U, A, I を入れればよい。

よって, 求める並び方は

$$\frac{8!}{4!1!2!1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 840 \text{ (通り)}$$

例えば

$\square N \square \square T \square M N$

という並び方は, 左から O, U, A, I を入れて

ONUATIMN

という並び方と対応する。