2 次関数

$\boxed{1}$

関数 $f(x)$，$g(x)$が，$f(x)=3x-1$，$g(x)=-2x^2+4x$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$f(0)$　　(2)　$f\left(-\frac{1}{3}\right)$　　(3)　$f(3a)$

(4)　$g(2)$　　(5)　$g\left(\frac{1}{2}\right)$　　(6)　$g(a-1)$

解答

$f(x)=3x-1$ であるから

(1)　$f(0)=3\cdot 0-1=\mathbf{-1}$

(2)　$f\left(-\frac{1}{3}\right)=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-1=-1-1=\mathbf{-2}$

(3)　$f(3a)=3\cdot 3a-1=\boldsymbol{9a-1}$

$g(x)=-2x^2+4x$ であるから

(4)　$g(2)=-2\cdot 2^2+4\cdot 2=-8+8=\mathbf{0}$

(5)　$g\left(\frac{1}{2}\right)=-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+2=\frac{-1+4}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

(6)　$g(a-1)=-2(a-1)^2+4(a-1)=-2(a^2-2a+1)+4a-4=-2a^2+4a-2+4a-4=\boldsymbol{-2a^2+8a-6}$

$\boxed{2}$

次の関数の値域を求めよ。

(1)　$y=3x+1$　$(-2 \leqq x \leqq 0)$

(2)　$y=-\frac{1}{3}x-2$　$(-3 \leqq x \leqq 1)$

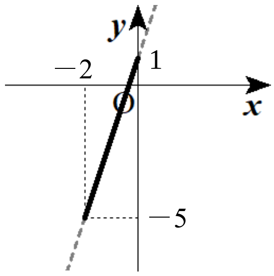
解答

(1)　$y=3x+1$　$(-2 \leqq x \leqq 0)$

のグラフは，右の図のようになる。

よって，値域は

$$\boldsymbol{-5 \leqq y \leqq 1}$$

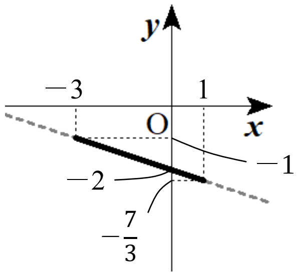


(2)　$y=-\frac{1}{3}x-2$　$(-3 \leqq x \leqq 1)$

のグラフは，右の図のようになる。

よって，値域は

$$\boldsymbol{-\frac{7}{3} \leqq y \leqq -1}$$



$\boxed{3}$

次の 2 次関数のグラフは，2 次関数 $y=2x^2$ のグラフをそれぞれどのように平行移動したものか答えよ。また，それぞれのグラフをかき，その軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=2x^2-1$　　(2)　$y=2(x-2)^2$　　(3)　$y=2(x+1)^2-3$

解答

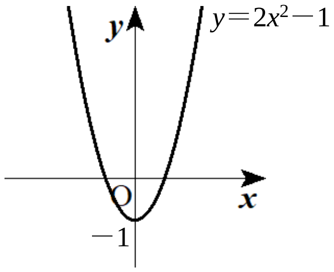
(1)　放物線 $y=2x^2-1$ は，放物線 $y=2x^2$ を

y 軸方向に -1

だけ平行移動したものである。

軸は　直線 $x=0$（y 軸），　頂点は　$(0,\ -1)$

であり，グラフは右の図のようになる。



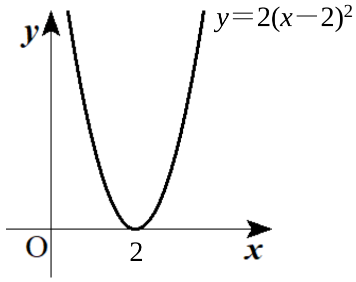
(2)　放物線 $y=2(x-2)^2$ は，放物線 $y=2x^2$ を

x 軸方向に 2

だけ平行移動したものである。

軸は　直線 $x=2$，　頂点は　$(2,\ 0)$

であり，グラフは右の図のようになる。



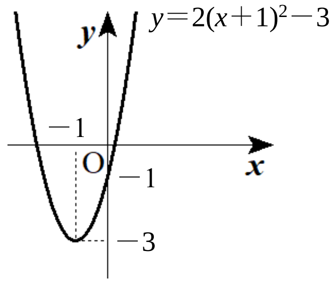
(3)　放物線 $y=2(x+1)^2-3$ は放物線 $y=2\{x-(-1)\}^2-3$ と表されるから，放物線 $y=2x^2$ を

x 軸方向に -1，　y 軸方向に -3

だけ平行移動したものである。

軸は　直線 $x=-1$，　頂点は　$(-1,\ -3)$

であり，グラフは右の図のようになる。



4

(1)　2 次関数 $y=-3x^2-2x+1$ のグラフをかき，その軸と頂点を求めよ。

(2)　2 つの放物線$y=x^2-8x$と$y=-\frac{1}{2}x^2+ax-3b$の頂点が一致するとき，定数a，bの値を求めよ。

解答

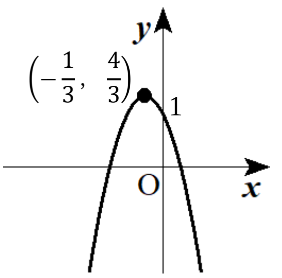
(1)　$y=-3x^2-2x+1=-3\left(x^2+\frac{2}{3}x\right)+1=-3\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)+1$

$=-3\left\{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right\}+1=-3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+1$

$=-3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$

軸は　**直線**$\boldsymbol{x=-\frac{1}{3}}$，　頂点の座標は　$\boldsymbol{\left(-\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)}$

グラフは右の図のようになる。



(2)　$y=x^2-8x=x^2-8x+16-16=(x-4)^2-16$　　よって，頂点は　$(4,\ -16)$

$y=-\frac{1}{2}x^2+ax-3b=-\frac{1}{2}(x^2-2ax)-3b=-\frac{1}{2}(x^2-2ax+a^2-a^2)-3b$

$=-\frac{1}{2}\{(x-a)^2-a^2\}-3b=-\frac{1}{2}(x-a)^2+\frac{1}{2}a^2-3b$

よって，頂点は　$\left(a,\ \frac{1}{2}a^2-3b\right)$　であるから

$$\begin{cases} 4=a & \cdots\cdots① \\ -16=\frac{1}{2}a^2-3b & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①を②に代入すると　$-16=\frac{1}{2}\cdot 4^2-3b=8-3b$　　これを解くと　$b=8$

したがって　$\boldsymbol{a=4,\ b=8}$

5

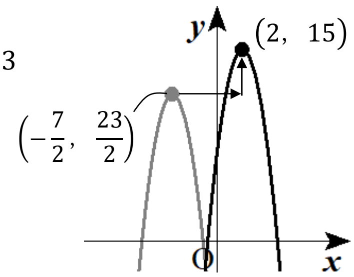
(1)　放物線 $y=-2x^2-14x-13$ をどれだけ平行移動すると，放物線 $y=-2x^2+8x+7$ に重なるか。

(2)　2 次関数 $y=x^2+ax+4$ のグラフを，x 軸方向に 2 だけ平行移動すると 2 次関数 $y=x^2-9x+b$ のグラフとなるとき，定数 a，b の値を求めよ。

(3)　次の空欄を埋めよ。

2 次関数 $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に （ア） ，y 軸方向に （イ） だけ平行移動したのち，（ウ） に関して対称移動したところ，グラフの式は $y=-x^2-2x-2$ となった。

解答



(1)　$y=-2x^2-14x-13=-2(x^2+7x)-13=-2\left(x^2+7x+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}\right)-13$

$=-2\left\{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\right\}-13=-2\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{2}-13$

$=-2\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{23}{2}$ であるから，頂点は　$\left(-\frac{7}{2},\ \frac{23}{2}\right)$

$y=-2x^2+8x+7=-2(x^2-4x)+7=-2(x^2-4x+4-4)+7$

$=-2\{(x-2)^2-4\}+7=-2(x-2)^2+8+7=-2(x-2)^2+15$

であるから，頂点は　(2，15)

$2-\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{11}{2}$，

$15-\frac{23}{2}=\frac{7}{2}$

それぞれの頂点の座標から，**x軸方向に$\frac{11}{2}$，y軸方向に$\frac{7}{2}$平行移動すれば重なる。**

(2)　$y=x^2+ax+4=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+4$ であるから，頂点は　$\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}+4\right)$

$y=x^2-9x+b=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{4}+b$ であるから，頂点は　$\left(\frac{9}{2},\ -\frac{81}{4}+b\right)$

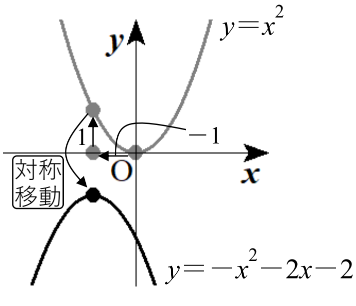
それぞれの頂点の座標から　$\begin{cases}-\frac{a}{2}+2=\frac{9}{2} & \cdots\cdots① \\ -\frac{a^2}{4}+4=-\frac{81}{4}+b & \cdots\cdots②\end{cases}$　①から，$-\frac{a}{2}=\frac{5}{2}$ より　$a=-5$

②に$a=-5$ を代入すると　$-\frac{(-5)^2}{4}+4=-\frac{81}{4}+b$　　これより　$b=-\frac{25}{4}+4+\frac{81}{4}=18$

したがって　**$a=-5$，$b=18$**

(3)　$y=-x^2-2x-2=-(x^2+2x)-2=-\{(x+1)^2-1\}-2=-(x+1)^2+1-2=-(x+1)^2-1$

であるから，頂点は　(－1，－1)



よって，2 次関数 $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に**（ア）　−1**，

y 軸方向に**（イ）　1**　だけ平行移動したのち，**（ウ）　x 軸**

に関して対称移動すると，グラフの式は $y=-x^2-2x-2$ となる。

〈注意〉**（ア）　1，（イ）　1，（ウ）　原点**　も正解である。

グラフの向きが反対にならなくてはいけないため，

（ア）　1，（イ）　−1，（ウ）　y 軸　は不正解。

6

(1)　関数 $y=x^2+x+2$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ の最大値および最小値を求めよ。

(2)　関数 $y=x^2-4x$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ の最小値を，定数 a を次の 3 つの場合に分けて求めよ。

①　$a<1$　　②　$1\leqq a\leqq 2$　　③　$2<a$

解答

(1)　$y=x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

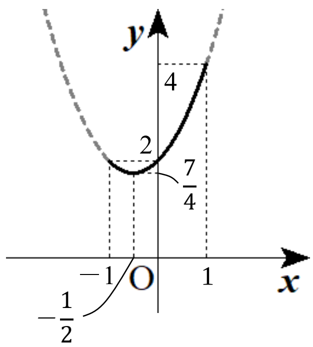
定義域が $-1\leqq x\leqq 1$ であるから

右のグラフより，

$x=1$ のとき最大値 4,

$x=-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{7}{4}$

をとる。



(2)　$y=x^2-4x=(x-2)^2-4$　$(a\leqq x\leqq a+1)$

このグラフは下に凸であり，頂点が決まっていて，定義域が動く。

①　$a<1$ のとき

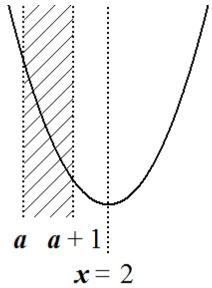
軸は $x=2$ であり，$a<1$ のとき $a+1<2$ であるから，

軸は定義域 $a\leqq x\leqq a+1$ の右外にある。

よって，**$x=a+1$** で最小となり，**最小値は**

$(a+1)^2-4(a+1)=a^2+2a+1-4a-4$

$=\boldsymbol{a^2-2a-3}$



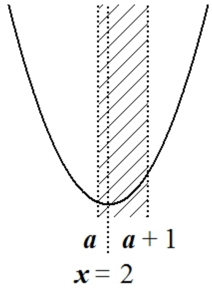
②　$1\leqq a\leqq 2$ のとき

軸 $x=2$ を定義域 $a\leqq x\leqq a+1$ に代入すると　$a\leqq 2\leqq a+1$

これを解くと，$\begin{cases} a\leqq 2 \\ 2\leqq a+1 \end{cases}$　より　$1\leqq a\leqq 2$

よって，軸 $x=2$ は定義域 $a\leqq x\leqq a+1$ の内側にある。

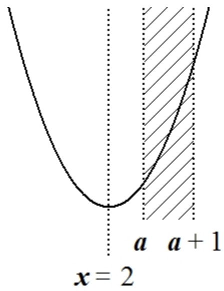
したがって，**$x=2$** で最小となり，**最小値は -4**



③　$2<a$ のとき

軸 $x=2$ は定義域 $a\leqq x\leqq a+1$ の左外にある。

よって，**$x=a$** で最小となり，**最小値は a^2-4a**



7

次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1)　3 点(2，0)，(1，1)，(3，5)を通る。

(2)　x 軸に接し，2 点(1，1)，(4，4)を通る。

解答

(1)　$y=ax^2+bx+c$ に $x=2$，$y=0$ および $x=1$，$y=1$ および $x=3$，$y=5$ を代入して連立方程式を作る。

$$\begin{cases} 0=4a+2b+c & \cdots\cdots① \\ 1=a+b+c & \cdots\cdots② \\ 5=9a+3b+c & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①－②，③－①から

$$\begin{cases} -1=3a+b \\ \ \ 5=5a+b \end{cases}$$　この連立方程式を解くと　$a=3$，$b=-10$

②に $a=3$，$b=-10$ を代入すると　$c=8$

以上より　$\boldsymbol{y=3x^2-10x+8}$

(2)　x 軸に接する場合は，頂点の y 座標が 0 である。

よって，求める 2 次関数は

$y=a(x-p)^2$

とおける。これに $x=1$，$y=1$ および $x=4$，$y=4$ を代入して連立方程式を作る。

$$\begin{cases} 1=a(1-p)^2 & \cdots\cdots① \\ 4=a(4-p)^2 & \cdots\cdots② \end{cases}$$　右辺を展開すると　$$\begin{cases} 1=a-2ap+ap^2 & \cdots\cdots①' \\ 4=16a-8ap+ap^2 & \cdots\cdots②' \end{cases}$$

②′－①′ から　$3=15a-6ap$

$1=5a-2ap$

$a(5-2p)=1$ で，$5-2p\neq 0$ であるから　$a=\dfrac{1}{5-2p}$

これを①に代入すると　$1=\dfrac{1}{5-2p}(1-p)^2$

$5-2p\neq 0$ より，両辺に $5-2p$ を掛けると　$5-2p=1-2p+p^2$

整理すると　$p^2-4=0$　　これを解いて　$p=\pm 2$

$p=2$ のとき，①から　$a=1$，　$p=-2$ のとき，①から　$a=\dfrac{1}{9}$

したがって　$\boldsymbol{y=(x-2)^2}$，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{9}(x+2)^2}$　　すなわち　$\boldsymbol{y=x^2-4x+4}$，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{4}{9}x+\dfrac{4}{9}}$

$\boxed{8}$

次の 2 次方程式を解け。

(1)　$x^2-10x+24=0$　　　(2)　$14x^2+29x-15=0$

(3)　$x^2+5x+5=0$　　　(4)　$x^2-6x-6=0$

解答

(1)　$x^2-10x+24=0$

左辺を因数分解して　$(x-4)(x-6)=0$

よって，$x-4=0$　　または　$x-6=0$

したがって　$\boldsymbol{x=4,\ 6}$

(2)　$14x^2+29x-15=0$

左辺を因数分解して

$$(2x+5)(7x-3)=0$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & \times & 5 & \longrightarrow & 35 \\ 7 & & -3 & \longrightarrow & -6 \\ \hline & & & & 29 \end{array}$$

よって，$2x+5=0$　　または　$7x-3=0$

したがって　$\boldsymbol{x=-\frac{5}{2},\ \frac{3}{7}}$

(3)　$x^2+5x+5=0$

解の公式により　$\boldsymbol{x}=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\boldsymbol{\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}}$

(4)　$x^2-6x-6=0$

この 2 次方程式は $x^2+2\cdot(-3)x-6=0$ とみることができるので

$$\boldsymbol{x}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot(-6)}}{1}=\boldsymbol{3\pm\sqrt{15}}$$

$\boxed{9}$

(1)　次の 2 次方程式の実数解の個数を求めよ。

①　$-2x^2+6x-\dfrac{9}{2}=0$　　　　②　$x^2-\dfrac{9}{2}x+5=0$

(2)　2 次方程式 $x^2-mx+m+3=0$ が重解をもつとき，定数 m の値を求めよ。
また，そのときの 2 次方程式の重解を求めよ。

解答

(1)　与えられた 2 次方程式の判別式を D とする。

①　$D=6^2-4\cdot(-2)\cdot\left(-\dfrac{9}{2}\right)=36-36=0$　　$D=0$ であるから，実数解の個数は　**1個**

②　$D=\left(-\dfrac{9}{2}\right)^2-4\cdot1\cdot5=\dfrac{81}{4}-20=\dfrac{1}{4}$　　$D>0$ であるから，実数解の個数は　**2個**

(2)　与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot(m+3)=m^2-4m-12=(m+2)(m-6)$$

重解をもつための条件は，$D=0$ が成り立つことである。

よって　$(m+2)(m-6)=0$　　これを解いて　$m=-2,\ 6$

$m=-2$ のとき，2 次方程式は $x^2+2x+1=0$ となる。これを解くと　$x=-1$

$m=6$ のとき，2 次方程式は $x^2-6x+9=0$ となる。これを解くと　$x=3$

したがって，**$m=-2$ のとき重解は $x=-1$，　$m=6$ のとき重解は $x=3$**

１０

2 次関数 $y=-x^2+4x+2k$ のグラフと x 軸との共有点の個数は, 定数 k の値によってどのように変わるか。

解答

2 次方程式 $-x^2+4x+2k=0$ の判別式を D とすると，$D=4^2-4\cdot(-1)\cdot 2k=16+8k$ である。

(ｉ) 異なる 2 つの共有点をもつとき，$D>0$ であるから　$16+8k>0$　　すなわち　$k>-2$

(ⅱ) 1 点で接するとき，$D=0$ であるから　$16+8k=0$　　すなわち　$k=-2$

(ⅲ) 共有点をもたないとき，$D<0$ であるから　$16+8k<0$　　すなわち　$k<-2$

(ｉ), (ⅱ), (ⅲ)より $\begin{cases} \boldsymbol{k>-2} \textbf{のとき　2個} \\ \boldsymbol{k=-2} \textbf{のとき　1個} \\ \boldsymbol{k<-2} \textbf{のとき　0個} \end{cases}$

１１

(1)　次の 2 次不等式を解け。

①　$2x^2 \leqq 7x$　　　②　$x^2 - x + \frac{1}{4} > 0$

(2)　連立不等式 $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leqq 0 \\ x^2 + x - 1 > 0 \end{cases}$ を解け。

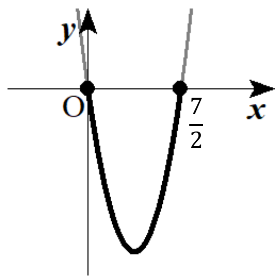
解答

(1)　①　$2x^2 \leqq 7x$　⇒　$2x^2 - 7x \leqq 0$

$2x^2 - 7x = 0$ の解は，$2x^2 - 7x = x(2x - 7) = 0$ より

$x = 0,\ \frac{7}{2}$

したがって不等式の解は，右の図より　$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \frac{7}{2}}$



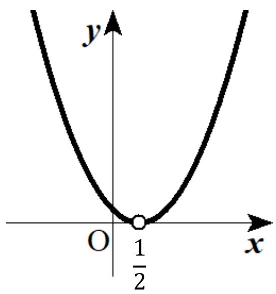
②　$x^2 - x + \frac{1}{4} > 0$

$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ の解は，$x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ より

$x = \frac{1}{2}$

したがって不等式の解は，右の図より

$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ **以外のすべての実数**　$\left(\text{または}\quad \boldsymbol{x < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < x}\right)$



(2)　・$x^2 + 2x - 3 \leqq 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$ の解は，$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0$ より

$x = -3,\ 1$

したがって，不等式の解は $-3 \leqq x \leqq 1$

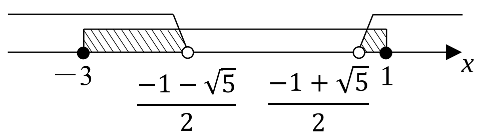
・$x^2 + x - 1 > 0$

$x^2 + x - 1 = 0$ の解は　$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

したがって，不等式の解は　$x < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2},\ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < x$

右の数直線より，連立不等式の解は

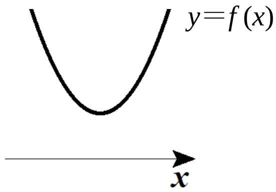
$\boldsymbol{-3 \leqq x < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2},\ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < x \leqq 1}$



１２

すべての実数 x に対して，2 次不等式 $x^2+(k-2)x-k+10>0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

解答



$f(x)=x^2+(k-2)x-k+10$ とすると，$f(x)$の x^2 の係数は正であるから，
2 次関数 $y=f(x)$のグラフは下に凸である。
よって，すべての実数 x に対して $f(x)>0$ が成り立つための条件は，
$y=f(x)$のグラフがつねに x 軸より上側にある，すなわち
$y=f(x)$のグラフが x 軸と共有点をもたないことである。
したがって，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，$D<0$ であればよい。
ここで，

$$D=(k-2)^2-4\cdot1\cdot(-k+10)=k^2-4k+4+4k-40=k^2-36=(k+6)(k-6)$$

であるから，$D<0$ より　$(k+6)(k-6)<0$
これを解くと　$\boldsymbol{-6<k<6}$

$\boxed{13}$

2 次関数 $y=x^2-(m+2)x+5$ のグラフが，x 軸の正の部分で異なる 2 つの共有点をもつように定数 m の値の範囲を定めよ。

解答

2 次関数 $y=x^2-(m+2)x+5$ のグラフに対して，$f(x)=x^2-(m+2)x+5$ とおき，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると　$D=\{-(m+2)\}^2-4\cdot1\cdot5=m^2+4m+4-20=m^2+4m-16$

$D>0$，(軸の位置)>0，$f(0)>0$　を満たせばよい。

(ｉ)　$D>0$　すなわち　$m^2+4m-16>0$

$m^2+4m-16=0$ の解は　$m=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot(-16)}}{2\cdot1}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+64}}{2}=\dfrac{-4\pm4\sqrt{5}}{2}=-2\pm2\sqrt{5}$

したがって　$m<-2-2\sqrt{5}$，$-2+2\sqrt{5}<m$

(ⅱ)　(軸の位置)>0

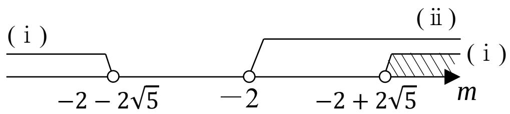
$x^2-(m+2)x+5=\left(x-\dfrac{m+2}{2}\right)^2-\left(\dfrac{m+2}{2}\right)^2+5$ より，軸は直線$x=\dfrac{m+2}{2}$

これより　$\dfrac{m+2}{2}>0$　　したがって　$m>-2$

(ⅲ)　$f(0)>0$

$f(0)=5$ より，$f(0)>0$ はつねに満たしている。

以上のことから，右の数直線より　$\boldsymbol{m>-2+2\sqrt{5}}$



研究

(1)　放物線 $y=-x^2+2x+5$ と直線 $y=x+3$ との共有点の座標を求めよ。

(2)　b を実数とする。放物線 $y=x^2-2x-2$ と直線 $y=2x+b$ が接するような定数 b の値を求めよ。

解答

(1)　y を消去して得られる 2 次方程式 $x+3=-x^2+2x+5$ の解を求める。

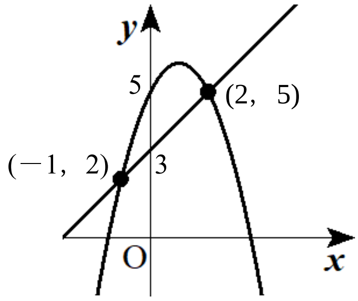
$x+3=-x^2+2x+5 \quad \Rightarrow \quad x^2-x-2=0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)(x-2)=0$

これを解くと　$x=-1,\ 2$

$x=-1$ のとき　$y=(-1)+3=2$

$x=2$ のとき　$y=2+3=5$

よって，求める共有点の座標は　**$(-1,\ 2)$，$(2,\ 5)$**



(2)　y を消去して得られる 2 次方程式 $2x+b=x^2-2x-2$ の実数解の個数が 1 個となればよい。

$2x+b=x^2-2x-2 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x-2-b=0$

2 次方程式 $x^2-4x-2-b=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-2-b)=16+8+4b=24+4b$$

$D=0$ のとき題意を満たす。したがって　$\boldsymbol{b=-6}$