

式と証明

1

(1) 次の式を展開せよ。

① $(x+1)(x^2-x+1)$

② $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

③ $(x+3)^3$

④ $(3a-2b)^3$

(2) 次の式を因数分解せよ。

① x^3+27

② $8a^3-125$

③ x^6+1

2

(1) ① $(a+b)^5$ を、パスカルの三角形を利用して展開せよ。

② $(a+b)^5$ を、二項定理を利用して展開せよ。

(2) $(x-3y)^6$ における x^2y^4 の係数を求めよ。

(3) $(a+b+c)^7$ の展開式における a^4b^3 の係数を求めよ。

3

(1) 整式 $A=x^3+2x^2+3x+4$ を整式 $B=x^2+3$ で割った商と余りを求めよ。

(2) 整式 $A=x^3+2x^2+3x+4$ を整式 B で割ると、商が $x+1$ 、余りが 2 であった。整式 B を求めよ。

4

(1) 次の分数式を既約分数式にせよ。

① $\frac{9xy^2}{12y^3}$

② $\frac{x^2+x}{x^2-1}$

(2) 次の計算をせよ。

① $\frac{x^2-9}{2y} \times \frac{y^2}{2x^2-9x+9}$

② $\frac{x^2+5x+6}{x+1} \div \frac{2x^2-6x-20}{3x+3}$

(3) 次の計算をせよ。

① $\frac{x^2-7}{x+7} + \frac{6x}{x+7}$

② $\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}$

(4) 次の式を簡単にせよ。

① $\frac{3x+6}{1+\frac{2}{x}}$

② $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$

5

次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

(1) $(a+1)x^2+bx+c=cx^2+ax+2$

(2) $ax^2+b(x+1)(x-1)+cx=x^2+2x+3$

(3) $\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$

6

(1) 等式 $(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+y^3$ を証明せよ。

(2) ① $a+b+c=0$ のとき、等式 $a^2-b^2-c^2-2bc=0$ が成り立つことを証明せよ。

② $\frac{a+b}{3} = \frac{b+c}{4} = \frac{c+a}{5} \neq 0$ のとき、 $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ の値を求めよ。

7

(1) $a < b, x < y$ のとき、不等式 $ax+by > bx+ay$ が成り立つことを証明せよ。

(2) ① 不等式 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$ を証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

② 不等式 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ を証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

8

(1) $a > 0, b > 0$ のとき、不等式 $\frac{3b}{2a} + \frac{6a}{b} \geq 6$ が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(2) $a > 1$ のとき、 $a + \frac{1}{a-1}$ の最小値を求めよ。また、そのときの a の値を求めよ。

9

(1) $x \geq 0, y \geq 0$ のとき、不等式 $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$ が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(2) 不等式 $|x| + |y| \geq \sqrt{x^2+y^2}$ を証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。