

積分法

1

(1) 不定積分 $\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} dx$ を求めよ。

(2) 次の不定積分を求めよ。

① $\int (\cos x - \sin x) dx$

② $\int \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1)}{\cos^2 x} dx$

(3) 不定積分 $\int (2^x + e^x) dx$ を求めよ。

2

次の不定積分を求めよ。

(1) ① $\int \sqrt[4]{2x-3} dx$

② $\int \cos(5x+1) dx$

(2) ① $\int \frac{x^2}{(x-2)^2} dx$

② $\int x\sqrt{x+2} dx$

(3) ① $\int \frac{e^x}{(e^x-3)^2} dx$

② $\int \cos^2 x \sin x dx$

③ $\int \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3+2}} dx$

(4) ① $\int \frac{3x^2}{x^3+2} dx$

② $\int \frac{1}{\tan x} dx$

3

(1) 次の不定積分を求めよ。

① $\int x \cos x \, dx$

② $\int x^2 \log x \, dx$

(2) 不定積分 $\int \frac{x^2}{e^x} \, dx$ を求めよ。

4

(1) 次の不定積分を求めよ。

① $\int \frac{x^2 + x}{x - 2} dx$

② $\int \frac{1}{x^2 + x} dx$

(2) 次の不定積分を求めよ。

① $\int \sin^2 x dx$

② $\int \cos^3 x dx$

③ $\int \cos^4 x dx$

④ $\int \cos 3x \cos x dx$

5

(1) 次の定積分を求めよ。

① $\int_2^4 x^3 dx$

② $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

③ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

④ $\int_{-2}^0 e^x dx$

(2) 次の定積分を求めよ。

① $\int_{-1}^2 \sqrt{|x|} dx$

② $\int_2^3 \frac{x+3}{x^2-1} dx$

③ $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

④ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x \cos 3x dx$

6

(1) 次の定積分を求めよ。

①
$$\int_{-3}^{-2} x(x+3)^4 dx$$

②
$$\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$$

(2) 次の定積分を求めよ。

①
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

②
$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

(3) 定積分 $\int_0^{3\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+9} dx$ を求めよ。

(4) 次の定積分を求めよ。

①
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx$$

②
$$\int_{-1}^1 x^2(x-1)^3 dx$$

(5) 次の定積分を求めよ。

①
$$\int_1^e \log x dx$$

②
$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx$$

7

(1) 次の関数を x で微分せよ。

① $y = \int_0^x \sin t \log(t^2 + 1) dt$

② $y = \int_{\frac{\pi}{2}}^x (x - t) \cos t dt$

(2) 等式 $f(x) = e^x + \int_0^1 t f(t) dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

8

次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 1}{n^2 + 1^2} + \frac{2 \cdot 2}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{2 \cdot n}{n^2 + n^2} \right)$$

9

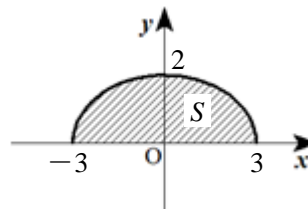
$0 \leq x \leq 1$ のとき, $x + 1 \leq (x + 1)^2$ を示せ。また, このことを利用して, $\frac{1}{2} < \log 2$ を示せ。

10

- (1) 2 曲線 $y = \sqrt{2 - x^2}$ と $y = x^2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。
- (2) 曲線 $x = \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}$ と y 軸, および 2 直線 $y = 1$, $y = 4$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。
- (3) 媒介変数 θ を用いて

$$x = 3\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

で表される曲線と x 軸で囲まれた 図形の
面積 S を求めよ。

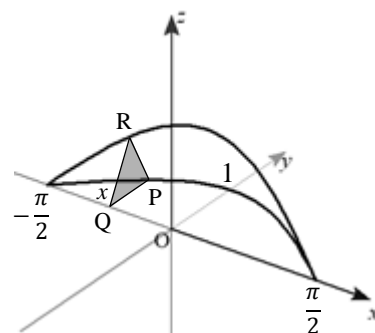


11

(1) xy 平面に曲線 $y = \cos x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) があり, この曲線上の

点 $P(x, \cos x)$ から x 軸に垂線 PQ を引く。ここで, 線分 PQ を 1 辺とする正三角形 PQR となるように, z 座標が正となる点 R を x 軸に垂直な平面上にとる。

点 Q が x 軸上を点 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ から点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ まで動くとき, この正三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ。



(2) 次の図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

① 曲線 $y = 2 - e^x$ と x 軸, および y 軸で囲まれた図形

② 曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形

12

次の曲線の長さ L を求めよ。

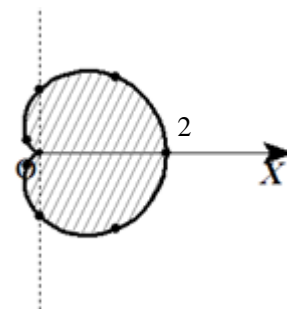
(1) サイクロイド $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)

(2) 曲線 $y = \frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$ ($1 \leq x \leq 4$)

研究

- (1) 極方程式 $r = 1 + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) で表される曲線上の点と極 O を結んだ線分が通過する領域の面積 S を求めよ。

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
r	2	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$



- (2) 放物線 $y = x(1-x)$ と x 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

