

# 積分法

1

(1) 不定積分  $\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} dx$  を求めよ。

(2) 次の不定積分を求めよ。

①  $\int (\cos x - \sin x) dx$

②  $\int \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1)}{\cos^2 x} dx$

(3) 不定積分  $\int (2^x + e^x) dx$  を求めよ。

2

次の不定積分を求めよ。

(1) ①  $\int \sqrt[4]{2x-3} dx$

②  $\int \cos(5x+1) dx$

(2) ①  $\int \frac{x^2}{(x-2)^2} dx$

②  $\int x\sqrt{x+2} dx$

(3) ①  $\int \frac{e^x}{(e^x-3)^2} dx$

②  $\int \cos^2 x \sin x dx$

③  $\int \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3+2}} dx$

(4) ①  $\int \frac{3x^2}{x^3+2} dx$

②  $\int \frac{1}{\tan x} dx$

3

(1) 次の不定積分を求めよ。

①  $\int x \cos x dx$

②  $\int x^2 \log x dx$

(2) 不定積分  $\int \frac{x^2}{e^x} dx$  を求めよ。

4

(1) 次の不定積分を求めよ。

①  $\int \frac{x^2 + x}{x - 2} dx$

②  $\int \frac{1}{x^2 + x} dx$

(2) 次の不定積分を求めよ。

①  $\int \sin^2 x dx$

②  $\int \cos^3 x dx$

③  $\int \cos^4 x dx$

④  $\int \cos 3x \cos x dx$

5

(1) 次の定積分を求めよ。

①  $\int_2^4 x^3 dx$

②  $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

③  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

④  $\int_{-2}^0 e^x dx$

(2) 次の定積分を求めよ。

①  $\int_{-1}^2 \sqrt{|x|} dx$

②  $\int_2^3 \frac{x + 3}{x^2 - 1} dx$

③  $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

④  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x \cos 3x dx$

6

(1) 次の定積分を求めよ。

①  $\int_{-3}^{-2} x(x + 3)^4 dx$

②  $\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x + 2}} dx$

(2) 次の定積分を求めよ。

①  $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$

②  $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

(3) 定積分  $\int_0^{3\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 9} dx$  を求めよ。

(4) 次の定積分を求めよ。

①  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx$

②  $\int_{-1}^1 x^2(x - 1)^3 dx$

(5) 次の定積分を求めよ。

①  $\int_1^e \log x dx$

②  $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx$

7

(1) 次の関数を  $x$  で微分せよ。

①  $y = \int_0^x \sin t \log(t^2 + 1) dt$

②  $y = \int_{\frac{\pi}{2}}^x (x - t) \cos t dt$

(2) 等式  $f(x) = e^x + \int_0^1 t f(t) dt$  を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。

8

次の極限值を求めよ。

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 \cdot 1}{n^2 + 1^2} + \frac{2 \cdot 2}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{2 \cdot n}{n^2 + n^2} \right)$

9

$0 \leq x \leq 1$  のとき、 $x + 1 \leq (x + 1)^2$  を示せ。また、このことを利用して、 $\frac{1}{2} < \log 2$  を示せ。

10

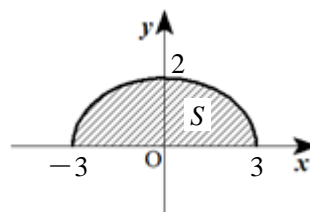
(1) 2 曲線  $y = \sqrt{2 - x^2}$  と  $y = x^2$  で囲まれた図形の面積  $S$  を求めよ。

(2) 曲線  $x = \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}$  と  $y$  軸、および 2 直線  $y = 1$ ,  $y = 4$  で囲まれた図形の面積  $S$  を求めよ。

(3) 媒介変数  $\theta$  を用いて

$$x = 3\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

で表される曲線と  $x$  軸で囲まれた 図形の面積  $S$  を求めよ。

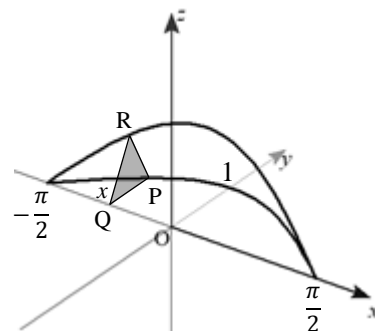


1 1

(1)  $xy$ 平面に曲線 $y = \cos x$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ )があり、この曲線上の

点 $P(x, \cos x)$ から $x$ 軸に垂線 $PQ$ を引く。ここで、線分 $PQ$ を1辺とする正三角形 $PQR$ となるように、 $z$ 座標が正となる点 $R$ を $x$ 軸に垂直な平面上にとる。

点 $Q$ が $x$ 軸上を点 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ から点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ まで動くとき、この正三角形が通過してできる立体の体積 $V$ を求めよ。



(2) 次の図形を $x$ 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 $V$ を求めよ。

① 曲線 $y=2-e^x$ と $x$ 軸、および $y$ 軸で囲まれた図形

② 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形

1 2

次の曲線の長さ $L$ を求めよ。

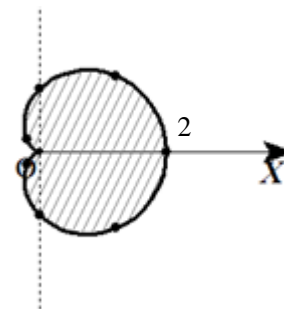
(1) サイクロイド  $x = \theta - \sin \theta$ ,  $y = 1 - \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ )

(2) 曲線 $y = \frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$  ( $1 \leq x \leq 4$ )

研究

(1) 極方程式 $r = 1 + \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) で表される曲線上の点と極 $O$ を結んだ線分が通過する領域の面積 $S$ を求めよ。

$\theta$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
$r$	2	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$



(2) 放物線 $y=x(1-x)$ と $x$ 軸で囲まれた図形を $y$ 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 $V$ を求めよ。

