

整数の性質

1

a, b は整数とする。 a, b が 5 の倍数ならば、 $2a-3b$ は 5 の倍数であることを証明せよ。

2

次の式を満たす整数 x, y の組 (x, y) をすべて求めよ。

(1) $xy = -7$

(2) $xy + 4x + y = 5$

3

7 個の自然数 1234, 2345, 3456, 4567, 5678, 6789, 7890 のうち、次の条件を満たすものをすべて答えよ。

(1) 2 の倍数

(2) 3 の倍数

(3) 4 の倍数

(4) 5 の倍数

(5) 9 の倍数

4

次の問いに答えよ。

(1) 次の数を素因数分解せよ。

① 210

② 243

(2) $\sqrt{\frac{20n}{3}}$ が自然数となるような、最小の自然数 n を求めよ。

5

(1) 次の 2 数の最大公約数、最小公倍数を求めよ。

① 10, 15

② 9, 90

(2) 次の 3 数の最大公約数、最小公倍数を求めよ。

① 4, 6, 8

② 18, 36, 48

(3) 最大公約数が 7、最小公倍数が 42 となる 2 つの自然数の組をすべて求めよ。

(4) 積が 450、最大公約数が 5 となる 2 つの自然数の組をすべて求めよ。

6

a, b は整数とする。 a を 8 で割ると 2 余り, b を 8 で割ると 5 余る。このとき, 次の式の値を 8 で割ったときの余りを求めよ。

(1) $3a+2b$

(2) ab

7

n は整数とする。 n^2 を 4 で割ったときの余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

8

次の 2 数の最大公約数を求めよ。

(1) 357, 799

(2) 667, 1771

9

(1) 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

① $5x-7y=1$

② $4x+9y=3$

(2) 100 以下の自然数で, 8 で割ると 2 余り, 13 で割ると 6 余るものを求めよ。

10

(1) 次の分数を小数で表したとき, 有限小数になるかどうか調べよ。

① $\frac{1}{125}$

② $\frac{3}{240}$

③ $\frac{2}{300}$

(2) 次の数を 10 進数で表せ。

① $123_{(4)}$

② $123_{(5)}$

③ $0.12_{(3)}$

(3) 次の 10 進数を, [] 内で指示された記数法で表せ。

① 20 [2 進法]

② 100 [6 進法]

③ $\frac{11}{16}$ [4 進法]

研究 1

$150!$ を計算すると、末尾に 0 が何個並ぶか。ただし、 $150!$ は 1 から 150 までのすべての自然数の積を表す。

研究 2

合同式を利用して、次のものを求めよ。

- (1) 2^{222} を 7 で割ったときの余り
- (2) 22^{22} を 5 で割ったときの余り

研究 3

a, b を自然数とするとき、次のことを証明せよ。

- (1) a, b が互いに素 $\Leftrightarrow 2a+b, 3a+2b$ は互いに素
- (2) 任意の自然数 n に対し、 $3n+4$ と $4n+5$ は互いに素であることを証明せよ。ただし、 $ax+by=1$ を満たす整数 x, y が存在するとき、 a, b は互いに素であることは証明なしに用いてもよい。

研究 4

6 個の整数がある。この中からうまく 2 個選べば、その 2 個の整数の差は 5 で割り切れることを証明せよ。