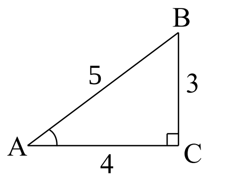
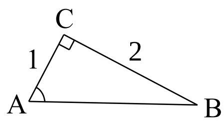
図形と計量

1　直角三角形の三角比

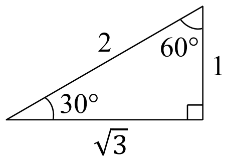
(1)　右の図の直角三角形 ABC において，
　sin$A$，　cos$A$，　tan$A$
　の値を求めよ。

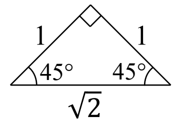


(2)　右の図の直角三角形 ABC において，
　sin$A$，　cos$A$，　tan$A$
　の値を求めよ。



(3)　右の図の直角三角形を参考に，
　次の三角比の値を求めよ。
　①　sin30°
　②　cos45°
　③　tan60°





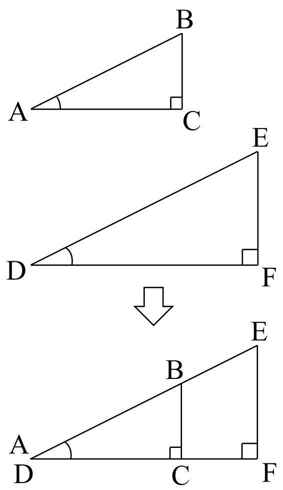
要　点

三角比の定義

直角三角形において，1 つの鋭角の大きさが定まるとすべて同じ形，すなわち相似になる。
右の図で∠BAC＝∠EDF のとき，
△ABC∽△DEF である。
このとき，AB：DE＝BC：EF であるから

　　AB・EF＝DE・BC

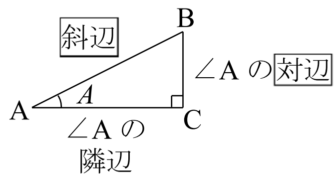
よって　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{DE}}$



以上から，∠A の大きさ A が定まれば，

比の値 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}\left(\dfrac{対辺}{斜辺}\right)$ は一定の値に決まる。

比の値 $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}\left(\dfrac{隣辺}{斜辺}\right)$，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}\left(\dfrac{対辺}{隣辺}\right)$ も同様にAだけで決まる。



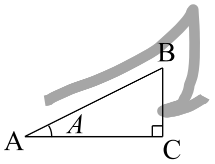
比の値 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$，$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ をそれぞれAの **正弦(サイン)**，**余弦(コサイン)**，**正接(タンジェント)** といい，

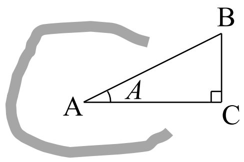
sin$A$，　cos$A$，　tan$A$ で表す。これらをまとめて **三角比** という。

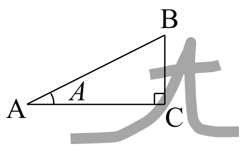
三角比

∠C＝90° の直角三角形 ABC において，A の三角比は次のようになる。

$$\sin A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} \qquad \cos A=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} \qquad \tan A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$$





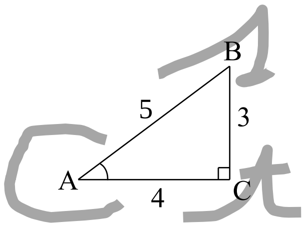


解答

(1)　$\sin A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$,

$\cos A=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$,

$\tan A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$



(2)　直角三角形 ABC を右のように向きを変える。

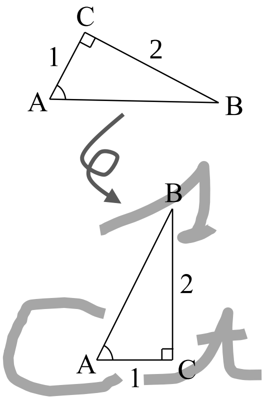
三平方の定理により　$\mathrm{AB}^2=1^2+2^2=5$

AB＞0 であるから　$\mathrm{AB}=\sqrt{5}$

よって　$\sin A=\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$,

$\cos A=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$,

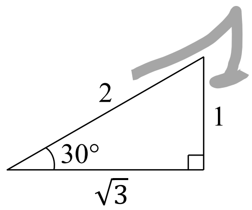
$\tan A=\frac{2}{1}=\mathbf{2}$



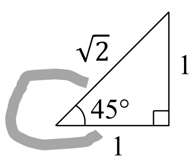
〈注意〉$\sin A$，$\cos A$の値は，分母を有理化して$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\frac{\sqrt{5}}{5}$としてもよいが，三角比の値の場合，

有理化をしないで答える場合が多い。

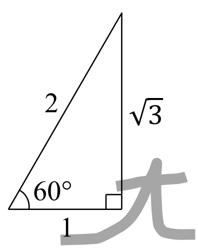
(3)　①　$\sin 30°=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$



②　$\cos 45°=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$



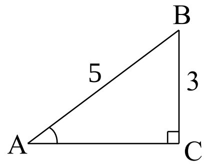
③　$\tan 60°=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{\mathbf{3}}$



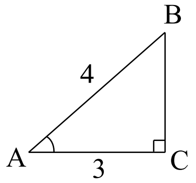
2　三角比の表

三角比の表を用いて，次の図の直角三角形 ABC における∠A のおよその大きさ A を求めよ。

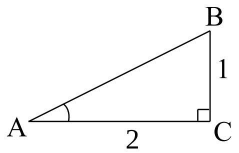
(1)



(2)



(3)



三角比の表

A	sin$A$	cos$A$	tan$A$
～			
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745

A	sin$A$	cos$A$	tan$A$
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000
～			

当該ファイルに関連のある部分を抜粋しています。

要　点

三角比の表の見方

右の表の値は，小数第 5 位を四捨五入した近似値である。

例えば A＝25° のとき，　sin25° ＝0.4226,
cos25° ＝0.9063,
tan25° ＝0.4663

である。

三角比の表

A	sin$A$	cos$A$	tan$A$
～			
25°	0.4226	0.9063	0.4663
～			

解答

(1)　$\sin A = \dfrac{3}{5} = 0.6$

三角比の表から，sin36° ＝0.5878,　sin37° ＝0.6018 より，sin37° の値が 0.6 に最も近いので　$\boldsymbol{A}$**≒37°**

〈注意〉A≒B の記号 ≒ は,「ニアリーイコール」と読み，A と B がほぼ等しいことを表す。

(2)　$\cos A = \dfrac{3}{4} = 0.75$

三角比の表から，cos41° ＝0.7547,　cos42° ＝0.7431 より，cos41° の値が 0.75 に最も近いので　$\boldsymbol{A}$**≒41°**

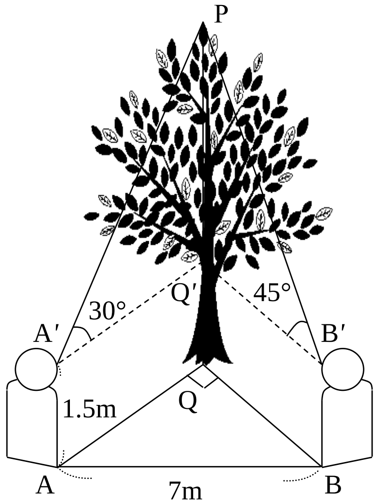
(3)　$\tan A = \dfrac{1}{2} = 0.5$

三角比の表から，tan26° ＝0.4877,　tan27° ＝0.5095 より，tan27° の値が 0.5 に最も近いので　$\boldsymbol{A}$**≒27°**

$\boxed{3}$ **三角比の利用**

木の先端を P，根元を Q とする。A 地点の目の位置 A′ から木の先端への仰角(ぎょうかく)が 30°，A から 7m 離れた∠AQB＝90° となる B 地点の目の位置 B′ から木の先端への仰角が 45° であるとき，木の高さを求めよ。ただし，目の高さを 1.5m とし，Q′ を右の図のように定める。

〈注意〉仰角とは，物を見上げたときの視線の方向と，水平面とのなす角である。下向きの角度は俯角(ふかく)という。



要　点

・$PQ' = x$とおき，$\dfrac{PQ'}{A'Q'} = \tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{PQ'}{B'Q'} = \tan 45° = 1$ を利用して，$A'Q'$，$B'Q'$をxを用いて表す。

・△A′Q′B′ において，三平方の定理を用いて x を求める。

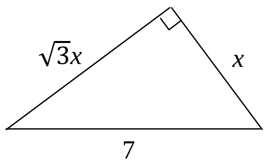
解答

$PQ' = x$とおく。$\angle PA'Q' = 30°$ より　$\dfrac{PQ'}{A'Q'} = \tan 30°$，　$\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$であるので　$A'Q' = \sqrt{3}x$

$\angle PB'Q' = 45°$ より　$\dfrac{PQ'}{B'Q'} = \tan 45°$，　$\tan 45° = 1$ であるので　$B'Q' = x$

△A′Q′B′ は直角三角形なので，三平方の定理により

$$\left(\sqrt{3}x\right)^2 + x^2 = 7^2 \qquad x^2 = \frac{49}{4}$$



$x > 0$ より　$x = \dfrac{7}{2} = 3.5$

したがって，木の高さは　3.5＋1.5＝**5 (m)**

$\boxed{4}$ **鋭角の三角比の相互関係**

θ(シータ) は鋭角とする。

(1)　$\cos\theta = \dfrac{2}{7}$のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

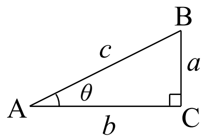
(2)　$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

要　点

三角比の相互関係

右の図の直角三角形 ABC において，

$$\sin\theta=\frac{a}{c},\qquad \cos\theta=\frac{b}{c}$$



より　$a=c\sin\theta$,　　$b=c\cos\theta$

よって　$\tan\theta=\dfrac{a}{b}=\dfrac{c\sin\theta}{c\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

また，三平方の定理により　$a^2+b^2=c^2$

これから　$(c\sin\theta)^2+(c\cos\theta)^2=c^2$

すなわち　$c^2\sin^2\theta+c^2\cos^2\theta=c^2$

両辺を c^2 で割ると　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$(\sin\theta)^2$，$(\cos\theta)^2$，$(\tan\theta)^2$ は，$\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$，$\tan^2\theta$ と書く。

さらに，この等式の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}\qquad \text{すなわち}\quad \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

したがって　$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　　すなわち　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

以上から，θ が鋭角のとき，次の等式が成り立つ。

$\boxed{1}$　$\boldsymbol{\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$　　$\boxed{2}$　$\boldsymbol{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$　　$\boxed{3}$　$\boldsymbol{1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

解答

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$　　これに，$\cos\theta=\dfrac{2}{7}$ を代入すると

$$\sin^2\theta=1-\left(\frac{2}{7}\right)^2=1-\frac{4}{49}=\frac{45}{49}$$

θは鋭角であるから　$\sin\theta>0$

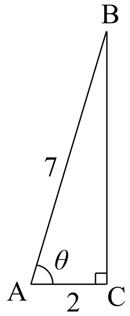
よって　$\boldsymbol{\sin\theta}=\sqrt{\dfrac{45}{49}}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{5}}{7}}$　　また　$\boldsymbol{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}\div\dfrac{2}{7}=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}\times\dfrac{7}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{5}}{2}}$

(2)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に，$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ を代入すると　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{4}{5}$　　θは鋭角であるから　$\cos\theta>0$　　したがって　$\boldsymbol{\cos\theta}=\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から　$\boldsymbol{\sin\theta}=\tan\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

$\boxed{\text{別解}}$ (1) $\cos\theta = \dfrac{2}{7}$ より



AB＝7，AC＝2，∠C＝90°

の直角三角形 ABC をかく。

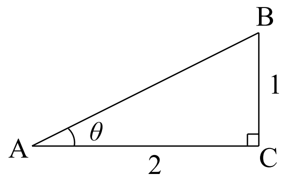
三平方の定理により

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 7^2 - 2^2 = 45$$

BC＞0 より　$BC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

よって　$\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$，　$\tan\theta = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

(2) $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ より



AC＝2，BC＝1，∠C＝90°

の直角三角形 ABC をかく。

三平方の定理により

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

$AB > 0$ より　$AB = \sqrt{5}$　　よって　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，　$\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\boxed{5}$ **90° −θ の三角比**

次の三角比を 45° より小さい角の三角比で表せ。

(1) sin70°　　(2) cos75°　　(3) tan58°

要　点

90° −θ の三角比

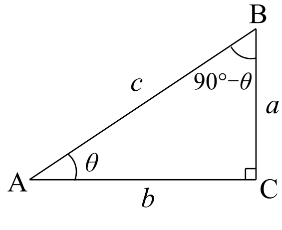
右の図の直角三角形 ABC において，

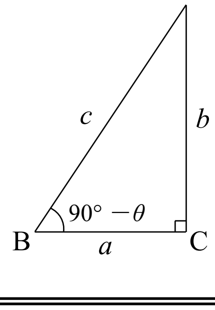
$$\sin\theta = \frac{a}{c},\quad \cos\theta = \frac{b}{c},\quad \tan\theta = \frac{a}{b}$$

であり，B＝90° −θ であるから

$$\sin(90^\circ-\theta) = \frac{b}{c},\quad \cos(90^\circ-\theta) = \frac{a}{c},$$

$$\tan(90^\circ-\theta) = \frac{b}{a}$$





よって　$\boldsymbol{\sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta}$，

$\boldsymbol{\cos(90^\circ-\theta) = \sin\theta}$，

$$\boldsymbol{\tan(90^\circ-\theta) = \frac{1}{\tan\theta}}$$

解答

(1)　70° ＝90° －20° であり，sin(90° －θ)＝cosθ であるから

　　　　sin70° ＝sin(90° －20°)＝**cos20°**

(2)　75° ＝90° －15° であり，cos(90° －θ)＝sinθ であるから

　　　　cos75° ＝cos(90° －15°)＝**sin15°**

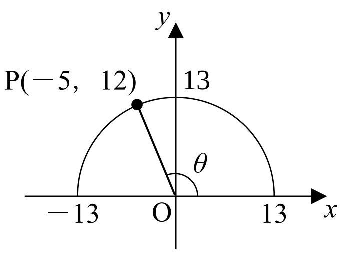
(3)　$58° = 90° - 32°$ であり，$\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$ であるから

$$\tan 58° = \tan(90° - 32°) = \boldsymbol{\frac{1}{\tan 32°}}$$

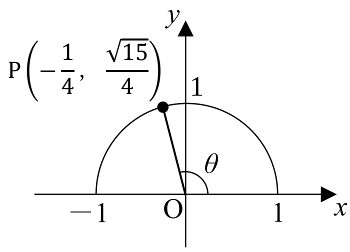
$\boxed{6}$　**鈍角の三角比**

(1)　次の図において，sinθ，cosθ，tanθ の値を求めよ。

①



②



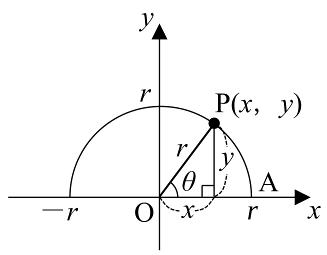
(2)　次の三角比の値を求めよ。

①　sin135°　　　②　cos150°　　　③　tan120°

要　点

拡張した三角比の定義

右の図のように原点 O を中心とする半径 r の半円をかき，x 軸の正の部分との交点を A とする。この半円の周上に点 P(x，y)をとり，∠AOP＝θ とする。



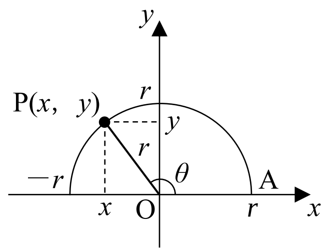
θ が 0° ＜θ＜90° のとき，「$\boxed{1}$　**直角三角形の三角比**」で学習したように，$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ である。

これを拡張して，θ が 0° ≦θ≦180° のときも，三角比を次のように定義する。

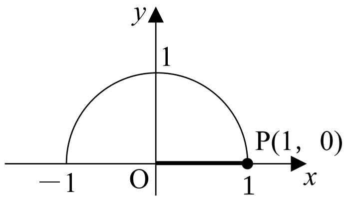
$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{y}{r}},$$

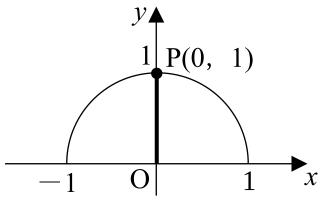
$$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{x}{r}},$$

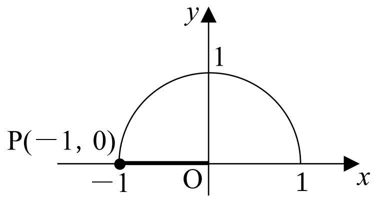
$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{y}{x}}$$



θ＝0°，90°，180° のとき，r＝1 とすると点 P の座標はそれぞれ(1，0)，(0，1)，(－1，0)となる。
よって，これらの角の三角比は次のようになる。ただし，tan90° は定義されない。







$\sin 0° = \frac{0}{1} = \mathbf{0}$　　$\sin 90° = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$　　$\sin 180° = \frac{0}{1} = \mathbf{0}$

$\cos 0° = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$　　$\cos 90° = \frac{0}{1} = \mathbf{0}$　　$\cos 180° = \frac{-1}{1} = \mathbf{-1}$

$\tan 0° = \frac{0}{1} = \mathbf{0}$　　**tan 90° は定義されない。**　　$\tan 180° = \frac{0}{-1} = \mathbf{0}$

解答

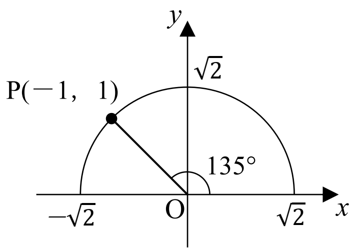
(1)　①　r＝13 であり，点 P の座標は(－5，12)であるから

$$\sin\theta = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{13}},\quad \cos\theta = \frac{-5}{13} = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{13}},\quad \tan\theta = \frac{12}{-5} = -\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}$$

②　$r = 1$ であり，点 P の座標は$\left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$であるから

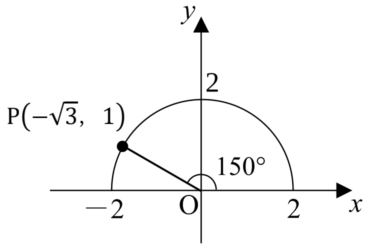
$$\sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{4}},\quad \cos\theta = \frac{-\frac{1}{4}}{1} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\quad \tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} = -\sqrt{\mathbf{15}}$$

(2)　①　θ＝135° のとき，
右の図のように点 P を
とることができる。



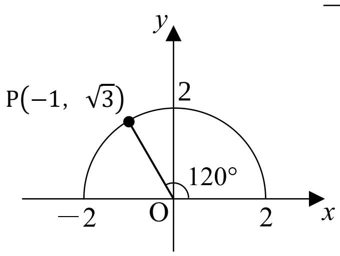
よって　$\sin 135° = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$

②　θ＝150° のとき，
右の図のように点 P を
とることができる。



よって　$\cos 150° = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

①　θ＝120° のとき，
右の図のように点 P を
とることができる。



よって　$\tan 120° = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{\mathbf{3}}$

$\boxed{7}$ **180° −θ の三角比**

次の三角比を 90° より小さい角の三角比で表せ。

(1)　sin140°　　(2)　cos165°　　(3)　tan130°

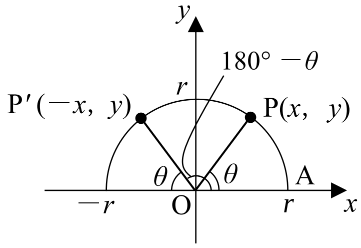
要　点

180° −θ の三角比

右の図のように，原点 O を中心とする半径 r の半円の周上に，

2 点 P，P′ を y 軸に関して対称となるようにとる。

このとき，θ，180° −θ の三角比は次のようになる。



$$\sin\theta=\frac{y}{r}\qquad \sin(180°-\theta)=\frac{y}{r}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}\qquad \cos(180°-\theta)=\frac{-x}{r}=-\frac{x}{r}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}\qquad \tan(180°-\theta)=\frac{y}{-x}=-\frac{y}{x}$$

よって　$\boldsymbol{\sin(180°-\theta)=\sin\theta}$,　$\boldsymbol{\cos(180°-\theta)=-\cos\theta}$,　$\boldsymbol{\tan(180°-\theta)=-\tan\theta}$

解答

(1)　140° ＝180° −40° であり，sin(180° −θ)＝sinθ であるから

sin140° ＝sin(180° −40°)＝**sin40°**

(2)　165° ＝180° −15° であり，cos(180° −θ)＝−cosθ であるから

cos165° ＝cos(180° −15°)＝**−cos15°**

(3)　130° ＝180° −50° であり，tan(180° −θ)＝−tanθ であるから

tan130° ＝tan(180° −50°)＝**−tan50°**

$\boxed{8}$ **三角比を含む方程式**

0° ≦θ≦180° のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

要　点

「$\boxed{6}$ **鈍角の三角比**」で学習した拡張した三角比の定義を満たすように，半円上に点 P(x，y)をとる。

ここで，「$\boxed{7}$ **180° −θ の三角比**」で学習したように，sin(180° −θ)＝sinθ が成り立つので，0° ≦θ≦180° で sinθ＝s を満たす θ があれば，180° −θ も方程式を満たす。すなわち，sinθ＝s を満たす θ は 2 つある。

〈注意〉0° ≦θ≦180° において，cosθ＝c，　tanθ＝t を満たす θ は 1 つである。

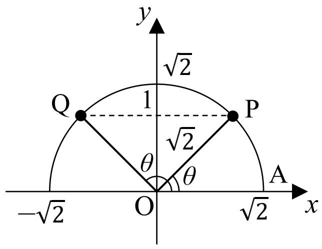
解答

(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$のとき，右の図のように

半径$\sqrt{2}$の半円上に点 P，Q をとると，

求めるθは∠AOP，∠AOQ である。

よって　**θ＝45°，135°**

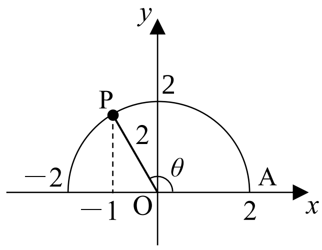


(2)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$のとき，右の図のように

半径 2 の半円上に点 P をとると，

求めるθは∠AOP である。

よって　**θ＝120°**



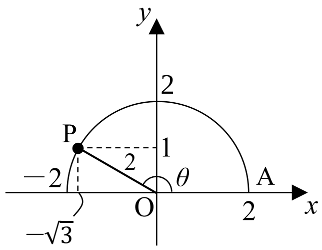
(3)　$\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{-\sqrt{3}}$であり，

$(-\sqrt{3})^2+1^2=2^2$であるから，

右の図のように半径 2 の半円上に点 P をとると，

求めるθは∠AOP である。

よって　**θ＝150°**



$\boxed{9}$　**鋭角・鈍角の三角比の相互関係**

0° ≦θ≦180° とする。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$のとき，$\cos\theta$と$\tan\theta$の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta=-2$のとき，$\sin\theta$と$\cos\theta$の値を求めよ。

要　点

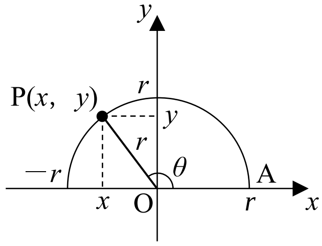
0° ≦θ≦180° の三角比の相互関係

「$\boxed{6}$　**鈍角の三角比**」で，三角比を次のように定義した。

$$\sin\theta=\frac{y}{r},$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r},$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$　　ただし，$\theta=90°$のとき$\tan\theta$は定義されない。



このとき，三平方の定理 $y^2+x^2=r^2$ が成り立つことなどから，「$\boxed{4}$ **鋭角の三角比の相互関係**」で学習した等式は，角 θ が $0°\leqq\theta\leqq180°$ のときにも成り立つ。

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$　　$\boxed{2}$ $\boldsymbol{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$　　$\boxed{3}$ $\boldsymbol{1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ を満たす θ は，$0°<\theta<90°$ と $90°<\theta<180°$ の 2 つある。

よって，求める $\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値も 2 組ある。

解答

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$　　これに，$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ を代入すると

$$\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

(ⅰ)　$\cos\theta>0$ のとき

$$\boldsymbol{\cos\theta}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\qquad\text{また}\quad\boldsymbol{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{3}\div\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

(ⅱ)　$\cos\theta<0$ のとき

$$\boldsymbol{\cos\theta}=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\qquad\text{また}\quad\boldsymbol{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{3}\div\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)=-\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

(2)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に，$\tan\theta=-2$ を代入すると　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+(-2)^2=1+4=5$

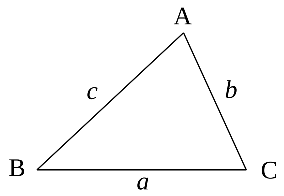
よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$　　$0°\leqq\theta\leqq180°$，　$\tan\theta=-2<0$ であるから　$90°<\theta<180°$

これから　$\cos\theta<0$　　したがって　$\boldsymbol{\cos\theta}=-\sqrt{\dfrac{1}{5}}=-\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から　$\boldsymbol{\sin\theta}=\tan\theta\cdot\cos\theta=(-2)\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

１０　**正弦定理・余弦定理**

△ABC において，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c，
∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C で表すことにする。



(1)　△ABC において，次のものを求めよ。

　①　$A=60°$，$B=45°$，$a=2$ のとき，b および外接円の半径 R

　②　$a=3$，$B=60°$，$c=4$ のとき　b

(2)　△ABC において，$B=45°$，$b=\sqrt{6}$，$c=3$ のとき，a，A，C を求めよ。

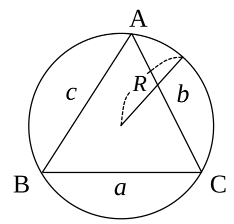
要　点

正弦定理

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R}$$

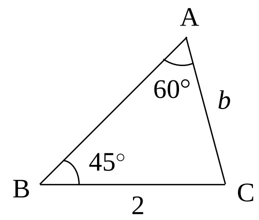
余弦定理

$$\boldsymbol{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\quad b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C}$$



解答

(1)　①　正弦定理により，$\dfrac{2}{\sin 60°}=\dfrac{b}{\sin 45°}$ から　$\dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{b}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$



よって　$\boldsymbol{b}=\left(2\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$

また，正弦定理により　$2R=\dfrac{2}{\sin 60°}$ から　$2R=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

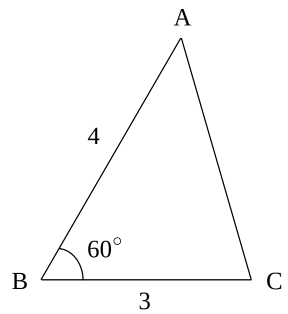
よって　$\boldsymbol{R}=\left(2\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}=2\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

②　余弦定理により

$b^2=4^2+3^2-2\cdot4\cdot3\cdot\cos60°$

$=16+9-24\cdot\dfrac{1}{2}=13$

$b>0$ から　$b=\boldsymbol{\sqrt{13}}$



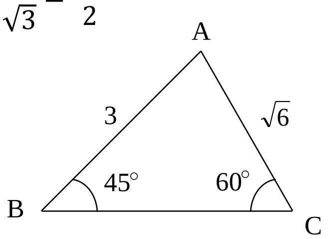
(2)　正弦定理により

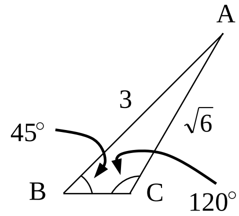
$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 45°}=\dfrac{3}{\sin C}$ から　$\dfrac{\sqrt{6}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{3}{\sin C}$

よって　$\sin C=3\div\left(\sqrt{6}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\times\dfrac{1}{\sqrt{6}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　$C=60°$，$120°$

△ABC は右の図のように 2 通りある。





余弦定理により

$(\sqrt{6})^2=3^2+a^2-2\cdot 3\cdot a\cdot\cos 45°$

$6=9+a^2-6a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　整理すると　$a^2-3\sqrt{2}a+3=0$

解の公式により　$a=\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{(-3\sqrt{2})^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$

また，$C=60°$ のとき　$A=75°$，　　$C=120°$ のとき　$A=15°$

以上から　$\boldsymbol{(a,\ A,\ C)=\left(\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},\ 75°,\ 60°\right),\ \left(\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2},\ 15°,\ 120°\right)}$

$\boxed{11}$　**三角形の形状**

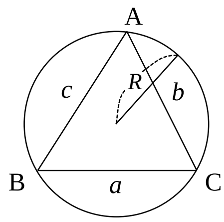
△ABC において，$\sin A=2\cos B\sin C$ が成り立っているとき，この三角形はどのような三角形か。

要　点

正弦定理，余弦定理を用いて，与えられた等式を辺だけの関係式にする。

解答

与えられた等式に　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$



をそれぞれ代入すると

$$\frac{a}{2R}=2\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{c}{2R}$$

両辺に $2aR$ を掛けると　$a^2=a^2+c^2-b^2$　　これから　$b^2=c^2$

$b>0$，$c>0$ より　$b=c$

よって，△ABC は **AB＝AC の二等辺三角形**である。

１２　**三角形の面積**

次の△ABC の面積を求めよ。

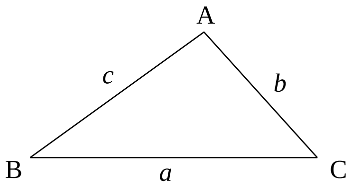
(1)　AB＝2，AC＝3，A＝60°

(2)　AB＝6，AC＝5，BC＝7

要　点

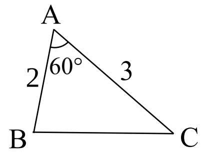
△ABC の面積を S とすると

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C}$$

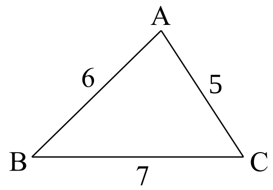


解答

(1)　$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot \sin 60°=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$



(2)　余弦定理により　$\cos A=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{1}{5}$



$\sin^2 A+\cos^2 A=1$,　$0°<A<180°$ のとき，$\sin A>0$ から

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

よって　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=\boldsymbol{6\sqrt{6}}$

別解　ヘロンの公式を用いる。

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{7+5+6}{2}=9 \text{ であるから}$$

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{9(9-7)(9-5)(9-6)}=6\sqrt{6}$$

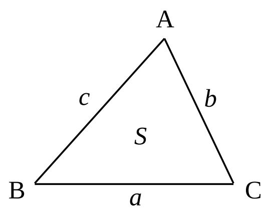
ヘロンの公式

△ABC において，頂点 A，B，C における角の大きさを A，B，C，その対辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c，

$s=\frac{a+b+c}{2}$，面積を S とすると，等式

$$\boldsymbol{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

が成り立つ。



$s=\frac{a+b+c}{2}$

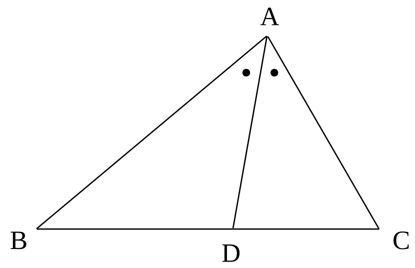
１３　**三角形の内角の二等分線の長さ**

△ABC において，AB＝5，AC＝3，∠A＝60° とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

要　点

三角形の面積を利用する。

∠BAD＝∠DAC，△ABC＝△ABD＋△ACD であり，



$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{BAC}$$

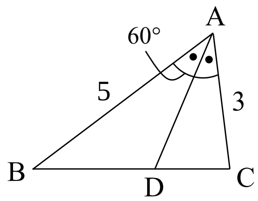
$$\triangle\mathrm{ABD}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin\angle\mathrm{BAD}$$

$$\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{DAC}$$

であることから AD を求めることができる。

解答

△ABC＝△ABD＋△ACD であるので，それぞれ面積の公式から



$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{BAC}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin\angle\mathrm{BAD}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{DAC}$$

よって　$\frac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\sin60°=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin30°+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot3\cdot\sin30°$

すなわち　$\frac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\mathrm{AD}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot3\cdot\frac{1}{2}$　　$\frac{15\sqrt{3}}{4}=\frac{5}{4}\mathrm{AD}+\frac{3}{4}\mathrm{AD}$

したがって　$\mathrm{AD}=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{3}}{8}}$

コメント　数学 A「図形の性質」で学習する，「内角の二等分線と線分の比」を利用して AD を求めることもできる。

① △ABC において，余弦定理を用いて BC の長さを求める。

② 内角の二等分線と線分の比の性質により，BD：DC＝AB：AC が成り立つ。これを用いて BD の長さを求める。

③ △ABC において，余弦定理を用いて cos∠B の値を求める。

④ △ABD において，余弦定理を用いて AD の長さを求める。

※上記の①～④で実際に AD を求めると，計算が非常に煩雑になる。計算ミスを減らすために，本問の解答のように面積の公式を用いた解法で AD を求めるようにしたい。

１４　**内接円の半径**

△ABC について，次の問いに答えよ。

(1)　a＝7，b＝9，c＝10 のとき，△ABC の面積 S と内接円の半径 r を求めよ。

(2)　a＝6，b＝8，∠C＝60° のとき，△ABC の内接円の半径 r を求めよ。

要　点

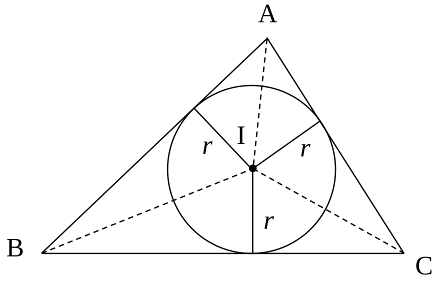
△ABC の内接円の中心，すなわち，内心を I，面積を S,

内接円の半径を r とすると

$$\boldsymbol{S}=\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICA}+\triangle\mathrm{IAB}$$

$$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}r(a+b+c)}$$



内接円の半径は，3 辺の長さと面積から求めることができる。

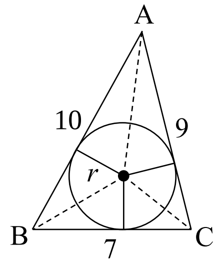
解答

(1)　$s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{7+9+10}{2}=13$ であるから，ヘロンの公式により

$$\boldsymbol{S}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{13\cdot 6\cdot 4\cdot 3}=\boldsymbol{6\sqrt{26}}$$

また，$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$ にそれぞれの値を代入すると

$$6\sqrt{26}=\frac{1}{2}r(7+9+10)$$　　これを解いて　$\boldsymbol{r=\dfrac{6\sqrt{26}}{13}}$

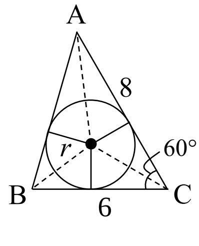


(2)　△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\angle\mathrm{C}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$$

また　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle\mathrm{C}=6^2+8^2-2\cdot 6\cdot 8\cdot\cos 60^\circ$

$$=36+64-2\cdot 6\cdot 8\cdot\frac{1}{2}=52$$



$c>0$ から　$c=2\sqrt{13}$　　　$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$にそれぞれの値を代入すると

$$12\sqrt{3}=\frac{1}{2}r\left(6+8+2\sqrt{13}\right)$$　　$12\sqrt{3}=\left(7+\sqrt{13}\right)r$ から

$$r=\frac{12\sqrt{3}}{7+\sqrt{13}}=\frac{12\sqrt{3}(7-\sqrt{13})}{(7+\sqrt{13})(7-\sqrt{13})}=\frac{12\sqrt{3}(7-\sqrt{13})}{36}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}(7-\sqrt{13})}{3}}$$

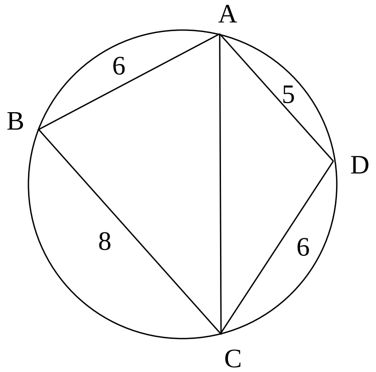
研究１　**円に内接する四角形の面積**

円に内接する四角形 ABCD において，AB＝6，BC＝8，CD＝6，DA＝5 のとき，対角線 AC の長さ，四角形 ABCD の面積 S をそれぞれ求めよ。

要　点

円に内接する四角形において，向かい合う角の和は 180° であることを利用する。

解答



△ABC において，余弦定理により

$AC^2 = 6^2 + 8^2 - 2\cdot 6\cdot 8\cdot \cos\angle ABC$

$= 100 - 96\cos\angle ABC$　……①

△ADC において，余弦定理により

$AC^2 = 6^2 + 5^2 - 2\cdot 6\cdot 5\cdot \cos\angle ADC$

$= 61 - 60\cos(180° - \angle ABC)$

$= 61 + 60\cos\angle ABC$　……②

①，②から　$100 - 96\cos\angle ABC = 61 + 60\cos\angle ABC$

これを解いて　$\cos\angle ABC = \dfrac{1}{4}$　　①に代入すると　$AC^2 = 100 - 96\cdot\dfrac{1}{4} = 76$

AC＞0 から　$\mathbf{AC = 2\sqrt{19}}$

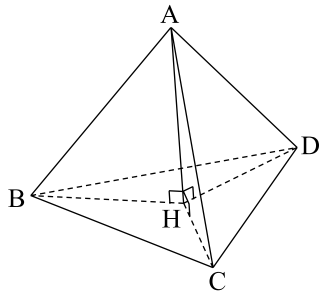
また　$\sin\angle ABC = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　$\sin\angle ADC = \sin(180° - \angle ABC) = \sin\angle ABC$ より

$$\boldsymbol{S} = \triangle ABC + \triangle ADC = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \boldsymbol{\frac{39\sqrt{15}}{4}}$$

研究２　**正四面体の体積**

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD の体積を求めよ。

要　点



頂点 A から底面△BCD に垂線 AH を引くと，直角三角形の斜辺と他の 1 辺が等しいから

△ABH≡△ACH≡△ADH

よって，BH＝CH＝DH であるから，点 H は△BCD の外心である。

このことを利用して，体積を求める。

解答

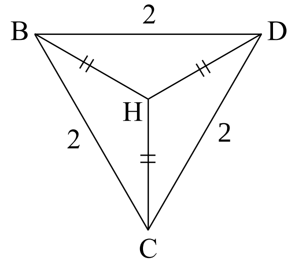
頂点 A から底面△BCD に垂線 AH を引くと

△ABH≡△ACH≡△ADH

これから，BH＝CH＝DH であるので，点 H は△BCD の外心である。

よって，BH は△BCD の外接円の半径であるから

∠AHB＝∠AHC＝∠AHD ＝90°，
AB＝AC＝AD,
AH は共通



$$\frac{2}{\sin 60^\circ} = 2\mathrm{BH} \qquad \text{これから} \quad \mathrm{BH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

△ABH は直角三角形であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{AH} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BH}^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

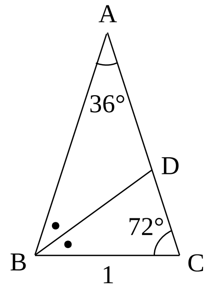
また　$\triangle\,\mathrm{BCD} = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$

以上から，正四面体の体積は　$\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\,\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AH} = \dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

研究３　**36° の三角比**

A＝36°，B＝C＝72°，BC＝1 の△ABC があり，∠ABC の二等分線と AC の交点を D とする。

△ABC∽△BCD であることを利用して，cos36° を求めよ。



解答

∠BAC＝∠CBD＝36°，∠ABC＝∠BCD より　△ABC∽△BCD

また，△BCD，△ABD は二等辺三角形であるから，BC＝BD＝AD＝1 である。

AB＝x とおくと CD＝x－1 であり，AB：BC＝BC：CD であるから

$x:1=1:(x-1)$　　よって　$x(x-1)=1$　　$x^2-x-1=0$

これを解いて　$x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　　　$x>0$ より　$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

△ ABC において，余弦定理により　$1 = x^2 + x^2 - 2\cdot x\cdot x\cdot\cos 36^\circ$　　これから　$\cos 36^\circ = \dfrac{2x^2-1}{2x^2}$

$x^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ であるから

$$\boldsymbol{\cos 36^\circ} = \frac{2\cdot\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-1}{2\cdot\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{(2+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{6-2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{4} = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$