図形と方程式

1　内分・外分・三角形の重心

(1)　数直線上の 2 点 A(−5)，B(2)を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

①　1 : 2 に内分する点　　②　中点　　③　1 : 2 に外分する点

(2)　座標平面上の 2 点 A(−1，3)，B(2，−1)を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

①　3 : 2 に内分する点　　②　3 : 2 に外分する点

(3)　座標平面上の 3 点 A(−1，3)，B(2，−1)，C(5，0)を頂点とする△ABC の重心の座標を求めよ。

要　点

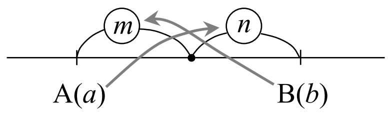
内分点・外分点

2 点 A(a)，B(b)を結ぶ線分 AB に対して

・m : n に内分する点の座標　$\dfrac{na+mb}{m+n}$

・分母は比の和

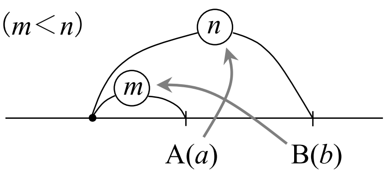
・分子は右の図のように掛けた積の和



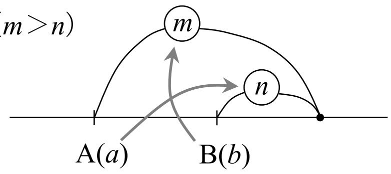
・m : n に外分する点の座標　$\dfrac{-na+mb}{m-n}$

内分における
n を $-n$ に
置き換えると得られる。

($m<n$)



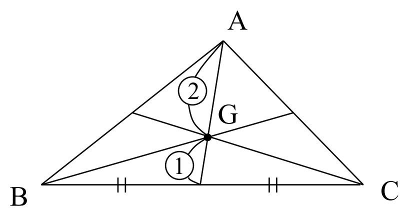
($m>n$)



重心の座標

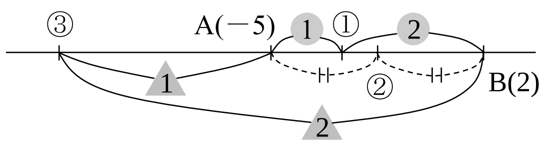
3 点 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)，C(x_3，y_3)を頂点とする
△ABC の重心 G の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$



解答

(1)　①　$\dfrac{2\cdot(-5)+1\cdot 2}{1+2}=-\mathbf{\dfrac{8}{3}}$

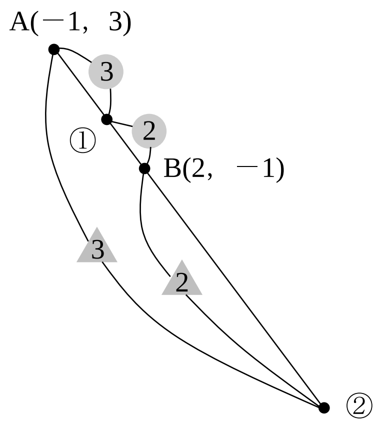


②　$\dfrac{-5+2}{2}=-\mathbf{\dfrac{3}{2}}$

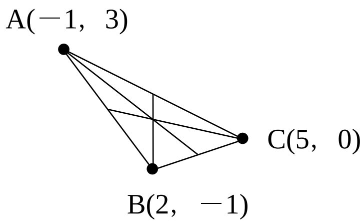
③　$\dfrac{2\cdot(-5)+(-1)\cdot 2}{-1+2}=\mathbf{-12}$

(2)　①　$\left(\dfrac{2\cdot(-1)+3\cdot 2}{3+2},\ \dfrac{2\cdot 3+3\cdot(-1)}{3+2}\right)$ から　$\left(\boldsymbol{\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}}\right)$

②　$\left(\dfrac{(-2)\cdot(-1)+3\cdot 2}{3-2},\ \dfrac{(-2)\cdot 3+3\cdot(-1)}{3-2}\right)$ から　$\boldsymbol{(8,\ -9)}$



(3)　$\left(\dfrac{-1+2+5}{3},\ \dfrac{3-1+0}{3}\right)$ から　$\left(\boldsymbol{2,\ \dfrac{2}{3}}\right)$



2　2 点間の距離

次の座標平面上の 2 点間の距離を求めよ。

(1)　(0，0)，(2，－4)　　　(2)　(－1，－2)，(2，－4)

要　点

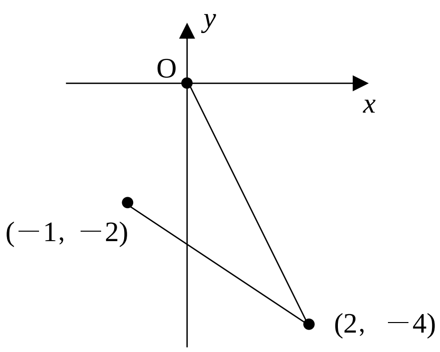
2 点間の距離

A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)のとき　$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

解答

(1)　$\sqrt{(2-0)^2+(-4-0)^2}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$

(2)　$\sqrt{\{2-(-1)\}^2+\{-4-(-2)\}^2}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$



3　直線の方程式

次の直線の方程式を求めよ。

(1)　2 点(7，3)，(－1，－5)を通る直線　　　(2)　点(7，3)を通り，直線 $3x+y-3=0$ に垂直な直線

要　点

2 点を通る直線の方程式

2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$を通る直線の方程式は

(i)　$x_1 \neq x_2$ のとき　$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$　　　(ii)　$x_1=x_2$ のとき　$x=x_1$

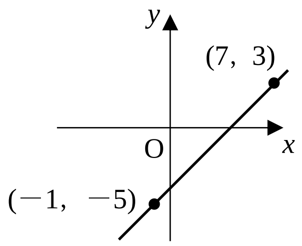
2 直線の平行条件・垂直条件

2 直線 $y=mx+n$，$y=m'x+n'$ が

(i)　平行　⇔　$m=m'$　　　(ii)　垂直　⇔　$mm'=-1$

解答

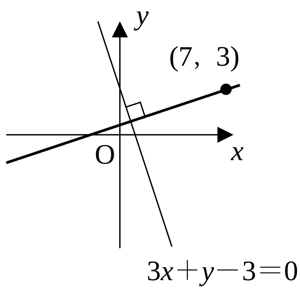
(1)　$y-3=\dfrac{-5-3}{-1-7}(x-7)$から　$\boldsymbol{y=x-4}$



(2)　直線 $3x+y-3=0$ の傾きは $y=-3x+3$ より -3 であるから，求める直線の傾き m は

$$-3\cdot m=-1 \text{ から}\quad m=\frac{1}{3}$$

したがって　$y-3=\dfrac{1}{3}(x-7)$から　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}}$



4　直線に関して対称な点

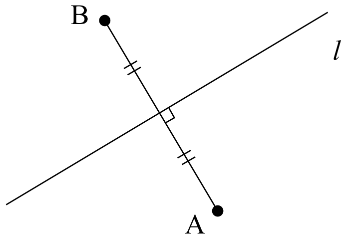
直線 $l : x-y+1=0$ に関して，点 A(3，0)と対称な点 B の座標を求めよ。

要　点

2 点 A，B が直線 l に関して対称であるのは，次の(i)，(ii)がともに成り立つときである。

(i)　直線 AB は直線 l に垂直

(ii)　線分 AB の中点は直線 l 上にある。



解答

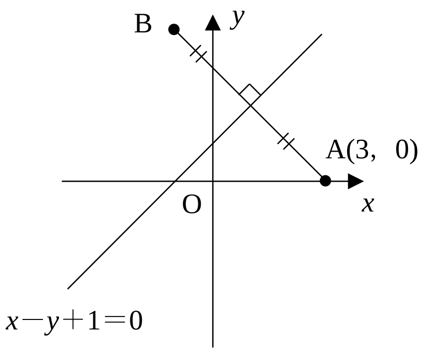
点 B の座標を$(p,\ q)$とする。

(i)　直線 l の傾きは，$y=x+1$ より　1

直線 AB の傾きは $\dfrac{q-0}{p-3}$ であり，直線 AB は

直線 l に垂直であるから　$\dfrac{q}{p-3}\times 1=-1$

すなわち　$q=-p+3$　……①



(ii)　線分 AB の中点は$\left(\dfrac{3+p}{2},\ \dfrac{0+q}{2}\right)$

これが直線 l 上にあるから　$\dfrac{3+p}{2}-\dfrac{q}{2}+1=0$

すなわち　$p-q=-5$　……②

①，②を連立させて解くと　$p=-1,\ q=4$

したがって，点 B の座標は　**(−1，4)**

5　**点と直線の距離**

(1)　次の点と直線の距離を求めよ。

①　$(0,\ 0)$，$7x-6y+5=0$　　②　$(1,\ 1)$，$y=3x+3$

(2)　座標平面上の 3 点 A$(0,\ 1)$，B$(4,\ -2)$，C$(3,\ 2)$について，次の問いに答えよ。

①　直線 AB の方程式を求めよ。　②　線分 AB の長さを求めよ。

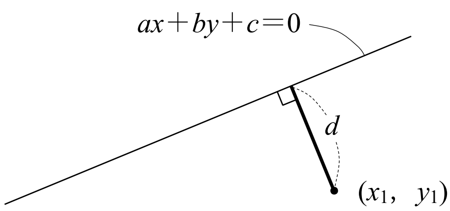
③　△ABC の面積を求めよ。

要　点

点と直線の距離

直線 $ax+by+c=0$ と点$(x_1,\ y_1)$の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



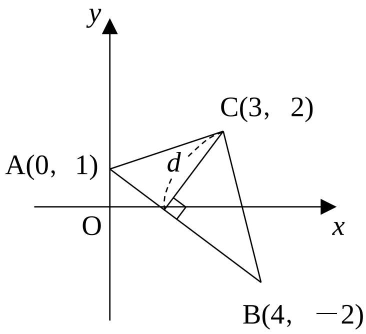
解答

(1)　①　求める距離を d とすると　$d=\dfrac{|7\cdot 0-6\cdot 0+5|}{\sqrt{7^2+(-6)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{85}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{85}}{17}}$

②　直線 $3x-y+3=0$ と点$(1,\ 1)$の距離 d は　$d=\dfrac{|3\cdot 1-1+3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$

(2) ① $y-1=\dfrac{-2-1}{4-0}x$ から　$\boldsymbol{y=-\dfrac{3}{4}x+1}$

② $\mathrm{AB}=\sqrt{(4-0)^2+(-2-1)^2}=\mathbf{5}$



③ $y=-\dfrac{3}{4}x+1$ を変形すると　$3x+4y-4=0$

直線 $3x+4y-4=0$ と点 C(3，2)の距離 d は

$$d=\frac{|3\cdot3+4\cdot2-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{13}{5}$$

以上から　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot\dfrac{13}{5}=\boldsymbol{\dfrac{13}{2}}$

6　**円の方程式**

(1) $x^2+y^2-2x-6y+1=0$ はどんな図形を表すか。

(2) 2 点(−2，−3)，(6，5)を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(3) 3 点(1，2)，(−2，1)，(4，−3)を通る円の方程式を求めよ。

要　点

円の方程式

中心$(a,\ b)$，半径 r の円の方程式は　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

また一般に，円の方程式は l，m，n を定数として次の形で表される。

$x^2+y^2+lx+my+n=0$

解答

(1) $x^2+y^2-2x-6y+1=0$ を変形すると，$x^2-2x+1+y^2-6y+9-1-9+1=0$ から

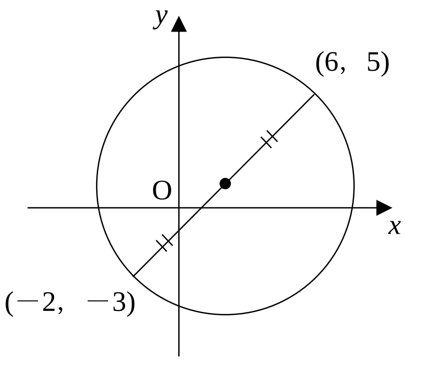
$(x-1)^2+(y-3)^2=9$

よって，**中心(1，3)，半径 3 の円**

(2) 直径の中点が円の中心であるから

$$\left(\frac{-2+6}{2},\ \frac{-3+5}{2}\right)$$

すなわち　(2，1)



また，円の半径を r とすると，r^2 は

2 点(−2，−3)，(2，1)の距離の 2 乗

であるから

$r^2=\{2-(-2)\}^2+\{1-(-3)\}^2=32$

よって，求める円の方程式は

$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-1)^2=32}$

(3)　求める円の方程式を，$x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。この円は 3 点$(1,\ 2)$，$(-2,\ 1)$，$(4,\ -3)$を通るから

$$\begin{cases} 1+4+l+2m+n=0 \\ 4+1-2l+m+n=0 \\ 16+9+4l-3m+n=0 \end{cases}\quad \text{これらを整理すると}\quad \begin{cases} l+2m+n=-5 & \cdots\cdots① \\ -2l+m+n=-5 & \cdots\cdots② \\ 4l-3m+n=-25 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①－②から　$3l+m=0$　……④，　　①－③から　$-3l+5m=20$　……⑤

④，⑤を連立させて解くと　$m=\dfrac{10}{3}$，$l=-\dfrac{10}{9}$　　①から　$n=-5+\dfrac{10}{9}-\dfrac{20}{3}=-\dfrac{95}{9}$

以上から，求める円の方程式は，$x^2+y^2-\dfrac{10}{9}x+\dfrac{10}{3}y-\dfrac{95}{9}=0$ より　$\boldsymbol{9x^2+9y^2-10x+30y-95=0}$

7　**円と直線の共有点**

(1)　円 $x^2+y^2+6x-4y+9=0$，直線 $x+y-1=0$ との共有点の座標を求めよ。

(2)　a を実数とする。円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=2x+a$ が接するときの a の値をすべて求めよ。

要　点

円の方程式と直線の方程式から，1 文字（例えば y）を消去して得られる 2 次方程式から，共有点の座標や共有点の個数を調べることができる。
共有点の個数など，円と直線の位置関係のみで答えが求まる問題では，点と直線の距離の公式を用いれば，はやく答えを求めることができる。

解答

(1)　$x^2+y^2+6x-4y+9=0$　……①，　　$x+y-1=0$　……②

とする。②を変形すると　$y=-x+1$　　これを①に代入すると

$$x^2+(-x+1)^2+6x-4(-x+1)+9=0 \qquad x^2+x^2-2x+1+6x+4x-4+9=0$$

$$2x^2+8x+6=0 \qquad 2(x+1)(x+3)=0 \qquad x=-1,\ -3$$

②から，$x=-1$ のとき $y=2$，　　$x=-3$ のとき $y=4$

よって，求める共有点の座標は　$\boldsymbol{(-1,\ 2),\ (-3,\ 4)}$

(2)　円 $x^2+y^2=4$ の中心$(0,\ 0)$と，直線 $2x-y+a=0$ の距離 d は　$d=\dfrac{|a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|a|}{\sqrt{5}}$

円の半径と d が一致するとき，円と直線は接する。よって，$d=2$ となればよい。

$\dfrac{|a|}{\sqrt{5}}=2$ から　$\boldsymbol{a=\pm 2\sqrt{5}}$

別解　$x^2+y^2=4$ に $y=2x+a$ を代入すると　$x^2+(2x+a)^2=4$　　$5x^2+4ax+a^2-4=0$

この 2 次方程式が重解をもつとき，円と直線は接する。2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(4a)^2-4\cdot 5\cdot (a^2-4)=-4a^2+80$$

$D=0$ となるのは，$-4a^2+80=0$ のときであるから，求める a の値は　$a=\pm 2\sqrt{5}$

8　円の接線の方程式

(1)　①　円 $x^2+y^2=9$ 上の点$(1,\ 2\sqrt{2})$における接線の方程式を求めよ。

　②　円 $x^2+y^2-2x-8y=0$ 上の点$(2,\ 0)$における接線の方程式を求めよ。

(2)　点$(-1,\ 3)$を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めよ。

要　点

(1)　円の接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点$(a,\ b)$における接線の方程式は　$ax+by=r^2$

一般に，円$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 上の点$(a,\ b)$における接線の方程式は

$$(a-p)(x-p)+(b-q)(y-q)=r^2$$

(2)　円外の点から円に引いた接線の方程式を求めるとき，まず，接点を$(a,\ b)$などに設定し，「円上の点$(a,\ b)$における接線が，条件にある円外の点を通る。」と考える。

解答

(1)　①　$\boldsymbol{x+2\sqrt{2}\,y=9}$

　②　$x^2+y^2-2x-8y=0$ を変形すると　$(x-1)^2+(y-4)^2=17$

　よって，$(x-1)^2+(y-4)^2=17$ 上の点$(2,\ 0)$における接線の方程式は

$$(2-1)(x-1)+(0-4)(y-4)=17$$　すなわち　$\boldsymbol{x-4y=2}$

(2)　まず，求める直線と円の接点を$(a,\ b)$とおく。

よって，接線の方程式は　$ax+by=1$

これが，$(-1,\ 3)$を通るから　$-a+3b=1$　……①

また，$(a,\ b)$は円上の点であるから　$a^2+b^2=1$　……②

①を変形すると　$a=3b-1$

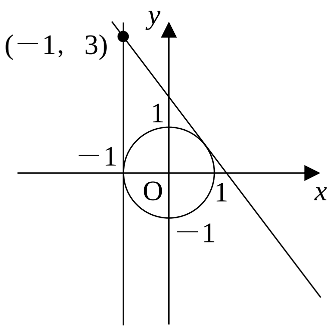
これを②に代入すると　$(3b-1)^2+b^2=1$

整理すると，$2b(5b-3)=0$ から　$b=0,\ \dfrac{3}{5}$

①から，$b=0$ のとき $a=-1$，$b=\dfrac{3}{5}$ のとき $a=\dfrac{4}{5}$

求める接線の方程式は　$-x=1$，$\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y=1$ から

$\boldsymbol{x=-1,\ 4x+3y=5}$



9　2 つの円の位置関係

2 つの円 $x^2+y^2=r^2$，$(x+4)^2+(y-3)^2=4$ が共有点をもつように，定数 r の値の範囲を定めよ。
ただし，$r>0$ とする。

要　点

2 つの円の位置関係は，2 つの円の半径と中心間の距離の関係を調べる。

半径がそれぞれ r_1，r_2($r_1>r_2$)である 2 つの円の中心間の距離を d とすると

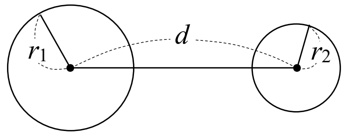
(1)　互いに外部にある　　$d>r_1+r_2$

(2)　外接する　　$d=r_1+r_2$

(3)　2 点で交わる　　$r_1-r_2<d<r_1+r_2$

(4)　一方が他方に内接する　　$d=r_1-r_2$

(5)　一方が他方を含む　　$d<r_1-r_2$



解答

円 $x^2+y^2=r^2$ は，中心(0，0)，半径 r

円$(x+4)^2+(y-3)^2=4$ は，中心(－4，3)，半径 2

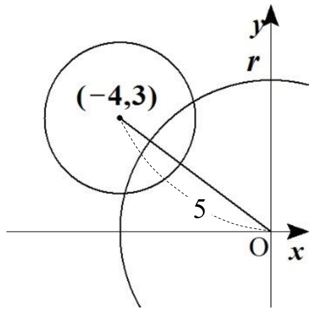
2 つの円の中心間の距離を d とすると　$d=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

(i)　外接するとき　　$5=r+2$ から　$r=3$

(ii)　一方が他方と内接するとき　　$5=r-2$ から　$r=7$

(iii)　2 点で交わるとき　　$r-2<5<r+2$ から　$3<r<7$

(i)～(iii)から，2 つの円が共有点をもつ r の値の範囲は　$\boldsymbol{3\leqq r\leqq 7}$



１０　**軌跡と方程式**

2 点 A(－2，0)，B(4，0)からの距離の比が 2：1 である点の軌跡を求めよ。

要　点

軌跡を求める手順

$\boxed{1}$　条件を満たす点 P の座標を(x，y)とおき，条件から x，y の関係式を求めて，その方程式が表す図形 F 上に点 P があることを示す。

$\boxed{2}$　図形 F 上の任意の点が，条件を満たしていることを示す。

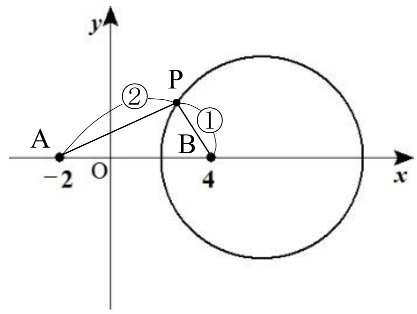
（注意）　$\boxed{1}$の証明から$\boxed{2}$が明らかな場合，$\boxed{2}$の証明を省略してもよい。

2 定点からの距離の比が一定である点の軌跡

2 定点 A，B からの距離の比が $m:n$（$m>0$，$n>0$，$m\neq n$）である点の軌跡は，線分 AB を $m:n$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円である。この円を **アポロニウスの円** という。

また，$m=n$ のとき，軌跡は線分 AB の垂直二等分線である。

解答



条件を満たす点を P(x, y)とすると

AP：BP＝2：1 から　AP＝2BP

よって　$AP^2=4BP^2$

したがって　$\{x-(-2)\}^2+(y-0)^2=4\{(x-4)^2+(y-0)^2\}$

整理すると，$3x^2-36x+60+3y^2=0$ から

$(x-6)^2+y^2=16$

以上から，求める点 P の軌跡は，**点(6，0)を中心とし，半径が 4 の円**である。

$\boxed{\text{補足}}$　線分 AB を 2：1 に内分する点　$\left(\dfrac{1\cdot(-2)+2\cdot4}{2+1},\ 0\right)$　すなわち　(2，0)

線分 AB を 2：1 に外分する点　$\left(\dfrac{(-1)\cdot(-2)+2\cdot4}{2-1},\ 0\right)$　すなわち　(10，0)

は，求めた円の直径の両端になっている。

１１　媒介変数と軌跡

実数 t の値が変化するとき，円 $x^2+y^2+\dfrac{5}{4}t^2-(x+2y)t-1=0$ の中心の軌跡を求めよ。

要　点

まず，円の中心の座標(x，y)を求める。x，y は t の式で表されるから，t を消去して，x，y の関係式を導く。これが求める軌跡となる。

解答

$x^2+y^2+\dfrac{5}{4}t^2-(x+2y)t-1=0$ を変形すると　$\left(x-\dfrac{t}{2}\right)^2+(y-t)^2=1$

円の中心の座標を(x，y)とすると

$x=\dfrac{t}{2}$，$y=t$

この 2 式から t を消去すると，$t=2x$ より　$y=2x$

よって，求める軌跡は　**直線 $y=2x$**　である。

１２　不等式の表す領域

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$3x-2y+6>0$

(2)　$\begin{cases} x^2+y^2 \geqq 4 \\ x-2y+2>0 \end{cases}$

要　点

直線と領域

直線 $y=mx+n$ を l とする。

　　不等式 $y>mx+n$ の表す領域は，直線 l の上側

　　不等式 $y<mx+n$ の表す領域は，直線 l の下側

（注意）$y\geqq mx+n$ のように，等号を含むときは境界線である直線 $y=mx+n$ 上の点を含む。他の図形の場合も同様である。

一般に，$y>f(x)$の表す領域は，曲線 $y=f(x)$の上側　　$y<f(x)$の表す領域は，曲線 $y=f(x)$の下側

円と領域

円$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を C とする。

　　不等式$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は，C の内部

　　不等式$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は，C の外部

連立不等式の表す領域

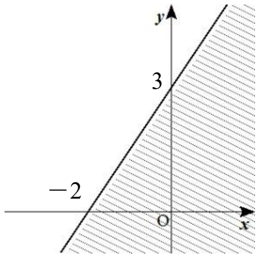
連立不等式の表す領域は，それぞれの不等式の表す領域の共通部分である。

解答

(1)　$3x-2y+6>0$ を変形すると　　$y<\dfrac{3}{2}x+3$

よって，求める領域は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含まない。



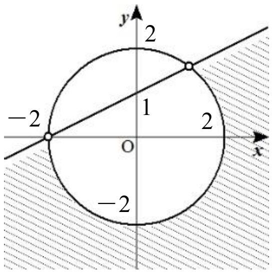
(2)　$x-2y+2>0$ を変形すると　　$y<\dfrac{1}{2}x+1$

よって，求める領域は円 $x^2+y^2=4$ の外部と

直線 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ の下側の共通部分で，右の図

の斜線部分である。

ただし，境界線のうち円周は含むが直線は含まない。



１３　**領域と最大・最小**

x，y が 3 つの不等式 $4x-y-2\geqq 0$，$2x+y-7\leqq 0$，$x+2y-5\geqq 0$ を満たすとき，次の値を求めよ。

(1)　$x+y$ の最大値，最小値　　　(2)　$(x-2)^2+y^2$ の最大値，最小値

要　点

まず，条件の連立不等式の表す領域 D を図示する。

次に求める式の値を，$f(x,\ y)=k$ とおき，領域 D と曲線 $f(x,\ y)=k$ が共有点をもつような k の値の範囲を調べ，k の最大値，最小値を求める。

解答

(1)　与えられた連立不等式の表す領域を D とする。

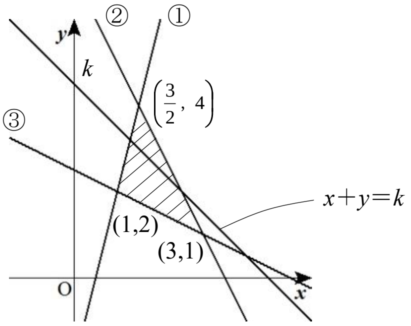
$$\begin{cases} 4x-y-2=0 & \cdots\cdots ① \\ 2x+y-7=0 & \cdots\cdots ② \\ x+2y-5=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$ をそれぞれ変形すると $$\begin{cases} y=4x-2 \\ y=-2x+7 \\ y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

であり，①と②の交点は　$\left(\dfrac{3}{2},\ 4\right)$

②と③の交点は　(3，1)

③と①の交点は　(1，2)

であるから，D は右の図の斜線部分である。



ここで，$x+y=k$　……④とおくと，

$y=-x+k$ と変形できるから，④は傾きが -1，y 切片が k の直線を表す。

この直線④が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

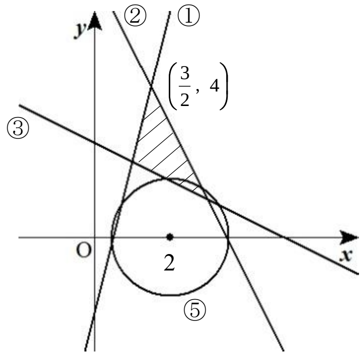
図から，k は④が $\left(\dfrac{3}{2},\ 4\right)$ を通るとき最大となり，(1，2)を通るとき最小となる。

よって，$x+y$ は　$\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2}}$**，**$\boldsymbol{y=4}$ **のとき最大値** $\dfrac{3}{2}+4=\boldsymbol{\dfrac{11}{2}}$，

$\boldsymbol{x=1}$**，**$\boldsymbol{y=2}$ **のとき最小値** $1+2=\boldsymbol{3}$ をとる。

(2)　$(x-2)^2+y^2=k$　……⑤とおくと，⑤は中心(2，0)，半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。

(1)から，D は右の図の斜線部分である。



よって，図から k は⑤が $\left(\dfrac{3}{2},\ 4\right)$ を通るとき最大となり，円⑤と直線③が接するとき最小となる。

直線③を変形すると，$x=-2y+5$ であるから，これを⑤に代入すると　$(-2y+3)^2+y^2=k$　　$4y^2-12y+9+y^2=k$　　$5y^2-12y+9-k=0$

これが重解をもつとき　$(-12)^2-4\cdot5(9-k)=0$　　$144-180+20k=0$　　$k=\dfrac{9}{5}$

このとき，$\dfrac{1}{5}(25y^2-60y+36)=\dfrac{1}{5}(5y-6)^2=0$ から　$y=\dfrac{6}{5}$，③から　$x=\dfrac{13}{5}$

したがって，$(x-2)^2+y^2$ は　$\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2}}$**，**$\boldsymbol{y=4}$ **のとき最大値** $\left(\dfrac{3}{2}-2\right)^2+4^2=\boldsymbol{\dfrac{65}{4}}$，

$\boldsymbol{x=\dfrac{13}{5}}$**，**$\boldsymbol{y=\dfrac{6}{5}}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{\dfrac{9}{5}}$ をとる。