実数，1 次不等式

1　実数

(1)　次の分数を小数で表せ。

①　$\dfrac{1}{6}$　　　②　$\dfrac{1}{8}$　　　③　$\dfrac{1}{11}$

(2)　次の循環小数を分数で表せ。

①　$0.\dot{5}$　　　②　$0.\dot{0}\dot{7}$　　　③　$1.\dot{2}3\dot{4}$

要　点

有理数

m，n は整数，$n \neq 0$ として，分数 $\dfrac{m}{n}$ の形で表される数を **有理数** という。

整数は有理数に含まれる。整数でない有理数を小数で表すと，**有限小数** となるか，または循環する無限小数（**循環小数**）となる。

有理数の和，差，積，商は有理数となる。

ただし，0 で割ることは考えない。

$$\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\\ \text{有限小数}\\ \text{循環小数}\end{cases}\\ \text{無理数（循環しない無限小数）}\ \}\ \text{無限小数}\end{cases}$$

実数

$\sqrt{2}=1.41421\cdots\cdots$，$\pi=3.14159\cdots\cdots$

のように循環しない無限小数を **無理数** という。

整数，有限小数，循環小数は分数 $\dfrac{m}{n}$ の形で表すことができるが，無理数は分数 $\dfrac{m}{n}$ の形で表せない。

有理数と無理数を合わせて 実数 という。

実数の和，差，積，商は実数となる。ただし，0 で割ることは考えない。

(2) ①　$x=0.\dot{5}$ とおくと，$10x=5.\dot{5}$ である。このとき，$10x-x$ は整数となるから，x を求めることができる。(2) ②，③も同様。

解答

(1)　①　$\dfrac{1}{6}=0.1666\cdots\cdots=\mathbf{0.1\dot{6}}$

〈注意〉循環小数は，循環する部分の最初と最後の数字の上に ˙ を付けて表す。

②　$\dfrac{1}{8}=\mathbf{0.125}$

③　$\dfrac{1}{11}=0.090909\cdots\cdots=\mathbf{0.\dot{0}\dot{9}}$

(2) ① $x=0.\dot{5}$ とおくと，$10x=5.\dot{5}$ であるから
$10x-x=5$
よって $x=\mathbf{\dfrac{5}{9}}$

$$\begin{array}{rl} 10x= & 5.555\cdots\cdots \\ -)\quad x= & 0.555\cdots\cdots \\ \hline 9x= & 5 \end{array}$$

② $x=0.\dot{0}\dot{7}$ とおくと，$100x=7.\dot{0}\dot{7}$ であるから
$100x-x=7$
よって $x=\mathbf{\dfrac{7}{99}}$

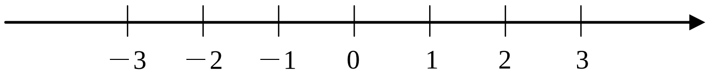
$$\begin{array}{rl} 100x= & 7.0707\cdots\cdots \\ -)\quad x= & 0.0707\cdots\cdots \\ \hline 99x= & 7 \end{array}$$

③ $x=1.\dot{2}3\dot{4}$ とおくと，$1000x=1234.\dot{2}3\dot{4}$ であるから
$1000x-x=1233$
よって $x=\mathbf{\dfrac{137}{111}}$

$$\begin{array}{rl} 1000x= & 1234.234234\cdots\cdots \\ -)\quad x= & 1.234234\cdots\cdots \\ \hline 999x= & 1233 \end{array}$$

2 絶対値とその性質

(1) 次の数直線上に点 $\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ をとれ。

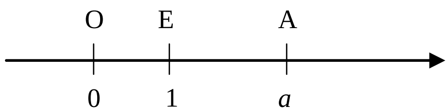


(2) 次の値を求めよ。
① $|-3|$　　② $|\sqrt{5}-3|$

(3) $|\sqrt{3}-2||\sqrt{3}+2|$ の値を求めよ。

要　点

数直線
直線上に点 O をとり, OE＝1 となるように点 E をとる。点 O からみて点 E のある側を正の向きと定める。
正の向きを右にした直線上の点 P に対して，次のように実数を対応させることができる。
　　点 P が点 O の右側にあり，線分 OP の長さが a のとき，実数 a
　　点 P が点 O の左側にあり，線分 OP の長さが a のとき，実数 $-a$
また，点 O には実数 0 を対応させる。このように，直線上の各点に実数を対応させるとき，この直線を **数直線** といい，点 O をその **原点** という。
数直線上において，点 A に実数 a が対応しているとき，a を点 A の **座標** といい，点 A を **A(a)** と表す。



絶対値
数直線上において，原点 O(0)から点 A(a)までの距離 OA を実数 a の **絶対値** をいい，$|a|$ と表す。
実数 a の絶対値について，次のことが成り立つ。
　　$\boldsymbol{a\geqq 0}$ **のとき** $\boldsymbol{|a|=a}$　　$\boldsymbol{a<0}$ **のとき** $\boldsymbol{|a|=-a}$

絶対値の性質

実数 a，b の絶対値について，次の性質が成り立つ。

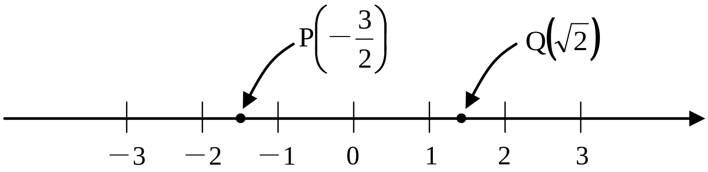
・$|\boldsymbol{a}| \geqq \boldsymbol{0}$　　$|a|=0$ となるのは，$a=0$ のときに限る。

・$|-\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|$　　・$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$　　・$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{ab}|$

・$\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=\left|\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right|$　　ただし　$b \neq 0$

解答

(1)



(2)　①　$|-3|=\boldsymbol{3}$

　②　$\sqrt{5}-3<0$ であるから　$|\sqrt{5}-3|=\boldsymbol{-\sqrt{5}+3}$

(3)　$|\sqrt{3}-2||\sqrt{3}+2|=|(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)|$

$=|3-4|=|-1|=\boldsymbol{1}$

平方根の近似値の語呂合わせ

ひと夜ひと夜に人見ごろ

$\sqrt{2}=$**1.　4　1　4　2 1　3 5 6**……

人なみにおごれや

$\sqrt{3}=$**1. 7 3　2　0 5　0 8**……

富士山麓オーム鳴く

$\sqrt{5}=$**2.2 3　6　0　6　7 9**……

$\boxed{3}$　**平方根**

(1)　次の値を求めよ。

①　$(\sqrt{3})^2$　　②　$\sqrt{(-5)^2}$

(2)　次の式を簡単にせよ。

①　$\sqrt{12}$　　②　$\sqrt{3}\sqrt{6}$　　③　$\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$　　④　$\sqrt{0.08}$

要　点

平方根

2 乗して a になる数を，a の **平方根** という。

正の数 a の平方根は正と負の 2 つあり，正の方を $\boldsymbol{\sqrt{a}}$，負の方を $\boldsymbol{-\sqrt{a}}$ で表し，まとめて $\boldsymbol{\pm\sqrt{a}}$ と書く。

0 の平方根は 0 だけであり，$\sqrt{0}=0$ とする。負の数の平方根は，実数の範囲には存在しない。

平方根の性質

$a \geqq 0$ のとき　$\boldsymbol{(\sqrt{a})^2=a}$，　$\boldsymbol{(-\sqrt{a})^2=a}$，　$\boldsymbol{\sqrt{a} \geqq 0}$

$a \geqq 0$ のとき　$\sqrt{a^2}=a$，　$a<0$ のとき　$\sqrt{a^2}=-a$　　すなわち　$\boldsymbol{\sqrt{a^2}=|a|}$

$a>0$，$b>0$，$k>0$ のとき

・$\boldsymbol{\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}}$　　・$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$　　・$\boldsymbol{\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}}$

解答

(1)　①　$(\sqrt{3})^2 = \mathbf{3}$

　　②　$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = \mathbf{5}$

(2)　①　$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \mathbf{2\sqrt{3}}$

　　②　$\sqrt{3}\sqrt{6} = \sqrt{3 \cdot 6} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \mathbf{3\sqrt{2}}$

　　③　$\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{20}{5}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = \mathbf{2}$

　　④　$\sqrt{0.08} = \sqrt{\dfrac{8}{100}} = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{100}} = \dfrac{\sqrt{2^2 \cdot 2}}{\sqrt{10^2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{10} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{5}}$

4　**根号を含む式の計算，分母の有理化**

(1)　次の式を計算せよ。

①　$\sqrt{20} + \sqrt{80}$　　　②　$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

③　$(1+\sqrt{5})^2$　　　④　$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})$

(2)　次の式の分母を有理化せよ。

①　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　②　$\dfrac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$　　③　$\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$　　④　$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

要　点

(1)　根号内が同じものを同類項のように扱う。

(2)　$(\sqrt{a})^2 = a$,　$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$　を利用する。

　例えば，①では $\sqrt{2}$ を，③では $2-\sqrt{3}$ を分母，分子に掛ければ，分母を有理化できる。

解答

(1)　①　$\sqrt{20} + \sqrt{80} = \sqrt{2^2 \cdot 5} + \sqrt{4^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = \mathbf{6\sqrt{5}}$

　　②　$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4-3 = \mathbf{1}$

　　③　$(1+\sqrt{5})^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = \mathbf{6+2\sqrt{5}}$

　　④　$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}) = (1 \cdot 2)(\sqrt{2})^2 + \{1 \cdot (-3\sqrt{3}) + \sqrt{3} \cdot 2\}\sqrt{2} + \{1 \cdot (-3)\}(\sqrt{3})^2$

$= 2 \cdot 2 + (-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} + (-3) \cdot 3 = 4 - \sqrt{6} - 9 = \mathbf{-5-\sqrt{6}}$

　　$\boxed{\text{別解}}$　$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}) = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot (-3\sqrt{3}) + \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot (-3\sqrt{3})$

$= 4 - 3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 9 = -5 - \sqrt{6}$

(2) ① $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

② $\dfrac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\dfrac{(2+\sqrt{6})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\mathbf{\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{3}}$

③ $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4-3}=\mathbf{2-\sqrt{3}}$

④ $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\dfrac{(\sqrt{5})^2+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3}=\dfrac{8+2\sqrt{15}}{2}=\mathbf{4+\sqrt{15}}$

5　不等式の性質

$a<b$ のとき，次の $\square$ にあてはまる不等号を入れよ。

(1) $a+2\ \square\ b+2$　　(2) $a-3\ \square\ b-3$　　(3) $\dfrac{1}{2}a\ \square\ \dfrac{1}{2}b$

(4) $-4a\ \square\ -4b$　　(5) $\dfrac{a}{-3}\ \square\ \dfrac{b}{-3}$　　(6) $6-5a\ \square\ 6-5b$

要　点

不等式の性質

1　$a<b$ ならば　$a+c<b+c$，　$a-c<b-c$

（不等式の両辺に，同じ数を足したり引いたりしても，不等号の向きは変わらない。）

2　$a<b$，$c>0$ ならば　$ac<bc$，　$\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

（不等式の両辺に，同じ正の数を掛けたり割ったりしても，不等号の向きは変わらない。）

3　$a<b$，$c<0$ ならば　$ac>bc$，　$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

（不等式の両辺に，同じ負の数を掛けたり割ったりすると，不等号の向きが変わる。）

解答

(1) $a+2\ \boxed{<}\ b+2$

(2) $a-3\ \boxed{<}\ b-3$

(3) $\dfrac{1}{2}a\ \boxed{<}\ \dfrac{1}{2}b$

(4) $-4a\ \boxed{>}\ -4b$

(5) $\dfrac{a}{-3}\ \boxed{>}\ \dfrac{b}{-3}$

(6) $a<b$ のとき，　$-5a>-5b$　であり，この両辺に 6 を足しても不等号の向きは変わらないから

$6-5a\ \boxed{>}\ 6-5b$

6　1 次不等式

次の不等式を解け。

(1)　$x-3<1$　(2)　$-2x \geqq 4$　(3)　$3x+1>-5$　(4)　$-4x+3 \leqq -5$

(5)　$4x+3 \geqq 2x+1$　(6)　$7-x \leqq 4x+2$　(7)　$3(x-2)>4x$　(8)　$\frac{x}{2}-1<\frac{x}{3}-\frac{1}{2}$

要　点

(1)～(6)　まず，$ax<b$ の形に変形して，x の係数 a の符号に注意して両辺を a で割る。
不等号が，$>$，$\leqq$，$\geqq$ の場合も同様。

(7)　まず，かっこをはずす。

(8)　まず，分母の最小公倍数を両辺に掛けて，係数を整数にする。

解答

(1)　$x-3<1$

移項して　$\boldsymbol{x<4}$

(2)　$-2x \geqq 4$

両辺を -2 で割って　$\boldsymbol{x \leqq -2}$

(3)　$3x+1>-5$

移項して　$3x>-6$

両辺を 3 で割って　$\boldsymbol{x>-2}$

(4)　$-4x+3 \leqq -5$

移項して　$-4x \leqq -8$

両辺を -4 で割って　$\boldsymbol{x \geqq 2}$

(5)　$4x+3 \geqq 2x+1$

移項して　$4x-2x \geqq 1-3$　　整理して　$2x \geqq -2$

両辺を 2 で割って　$\boldsymbol{x \geqq -1}$

(6)　$7-x \leqq 4x+2$

移項して　$-x-4x \leqq 2-7$　　整理して　$-5x \leqq -5$

両辺を -5 で割って　$\boldsymbol{x \geqq 1}$

(7)　$3(x-2)>4x$

かっこをはずして　$3x-6>4x$

移項して　$3x-4x>6$　　整理して　$-x>6$

両辺を -1 で割って　$\boldsymbol{x<-6}$

(8)　$\frac{x}{2}-1<\frac{x}{3}-\frac{1}{2}$

両辺に 6 を掛けて　$3x-6<2x-3$

移項して　$3x-2x<-3+6$　　整理して　$\boldsymbol{x<3}$

$\boxed{7}$ **連立不等式**

(1)　次の連立不等式を解け。

①　$\begin{cases} x \leqq 2x+1 \\ 9x-5<2x+9 \end{cases}$　　　②　$\begin{cases} 3(x-1)>5(x+1) \\ 3(x+2) \leqq 5(x+2) \end{cases}$

(2)　不等式 $-x+1<2x+1<4x-5$ を解け。

要　点

数直線を利用して，それぞれの不等式の解の共通範囲を求める。

(2)　不等式 $A<B<C$ は，連立不等式 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ と同じであるから，これを解く。

解答

(1)　①　$\begin{cases} x \leqq 2x+1 & \cdots\cdots(\text{i}) \\ 9x-5<2x+9 & \cdots\cdots(\text{ii}) \end{cases}$

(ⅰ) から　　$-x \leqq 1$

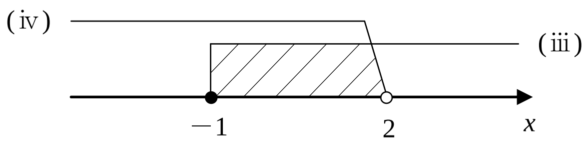
よって　　$x \geqq -1$　……(ⅲ)

(ⅱ) から　　$9x-2x<9+5$

よって　　$7x<14$

これを解いて　　$x<2$　……(ⅳ)

(ⅲ) と (ⅳ) の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-1 \leqq x<2}$



〈注意〉●は，その点を表す数が解に含まれることを示し，○は，その点を表す数が解に含まれないことを示す。

②　$\begin{cases} 3(x-1)>5(x+1) & \cdots\cdots(\text{i}) \\ 3(x+2) \leqq 5(x+2) & \cdots\cdots(\text{ii}) \end{cases}$

(ⅰ) から　　$3x-3>5x+5$

よって　　$-2x>8$

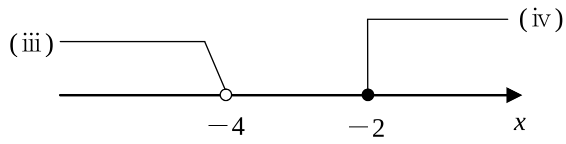
これを解いて　　$x<-4$　……(ⅲ)

(ⅱ) から　　$3x+6 \leqq 5x+10$

よって　　$-2x \leqq 4$

これを解いて　　$x \geqq -2$　……(ⅳ)

(ⅲ) と (ⅳ) の共通範囲はないから，　**解はない**。



(2)　$\begin{cases} -x+1<2x+1 & \cdots\cdots(\text{i}) \\ 2x+1<4x-5 & \cdots\cdots(\text{ii}) \end{cases}$

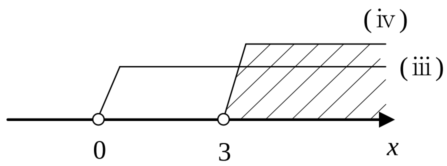
(ⅰ) から　　$-3x<0$

よって　　$x>0$　……(ⅲ)

(ⅱ) から　　$-2x<-6$

よって　　$x>3$　……(ⅳ)

(ⅲ) と (ⅳ) の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{x>3}$



8　**絶対値を含む方程式・不等式**

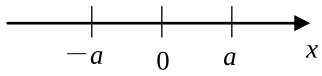
次の方程式，不等式を解け。

(1)　$|2x+3|=1$　　(2)　$|x-6|<3$　　(3)　$|7x+2|\geqq 2$

要　点

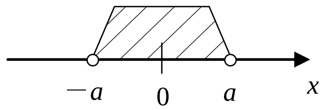
$a>0$ のとき，　**方程式 $|x|=a$ の解は**

　　$x=\pm a$



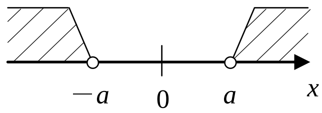
不等式 $|x|<a$ の解は

　　$-a<x<a$



方程式 $|x|>a$ の解は

　　$x<-a$，$a<x$



〈注意〉$|x|\leqq a$ の解は　$-a\leqq x\leqq a$，　$|x|\geqq a$ の解は　$x\leqq -a$，$a\leqq x$

解答

(1)　$|2x+3|=1$ から　$2x+3=\pm 1$

よって　$2x=-3\pm 1$　　したがって　**$x=-1$，-2**

(2)　$|x-6|<3$ から　$-3<x-6<3$

したがって　**$3<x<9$**

(3)　$|7x+2|\geqq 2$ から　$7x+2\leqq -2$，$2\leqq 7x+2$

よって　$7x\leqq -4$，$0\leqq 7x$　　したがって　**$x\leqq -\frac{4}{7}$，$0\leqq x$**

9　**絶対値を含むやや複雑な方程式・不等式（場合分けの利用）**

次の方程式，不等式を解け。

(1)　$|3x-2|=x$　　(2)　$|2x+5|\leqq -x+8$

要　点

$|\qquad|=$（正の数）の形のときは，前問 $\boxed{8}$ の公式が利用できる。不等式も同様。

本問のように，絶対値の中にも外にも x が含まれているときは，絶対値の中の符号で場合分けをして，絶対値をはずす。得られた解が場合分けの条件を満たすかどうか必ずチェックする必要がある。

〈注意〉$|\qquad|=$（正の数）の形のときも，絶対値の中の符号で場合分けをして解いてもよい。

解答

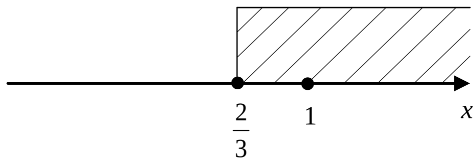
(1)　$|3x-2|=x$

（ｉ）　$3x-2 \geqq 0$　　すなわち　$x \geqq \dfrac{2}{3}$　のとき

$$3x-2=x$$

これを解いて　$x=1$

これは $x \geqq \dfrac{2}{3}$ を満たす。

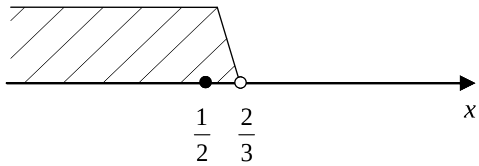


（ⅱ）　$3x-2<0$　　すなわち　$x<\dfrac{2}{3}$　のとき

$$-(3x-2)=x \qquad -3x+2=x$$

これを解いて　$x=\dfrac{1}{2}$

これは $x<\dfrac{2}{3}$ を満たす。



（ｉ），（ⅱ）から，方程式の解は　$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{1}{2}}$

(2)　$|2x+5| \leqq -x+8$

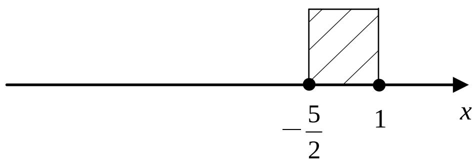
（ｉ）　$2x+5 \geqq 0$　　すなわち　$x \geqq -\dfrac{5}{2}$　のとき

$$2x+5 \leqq -x+8$$

これを解いて　$x \leqq 1$

これと $x \geqq -\dfrac{5}{2}$ の共通範囲は

$$-\frac{5}{2} \leqq x \leqq 1 \quad \cdots\cdots①$$



（ⅱ）　$2x+5<0$　　すなわち　$x<-\dfrac{5}{2}$　のとき

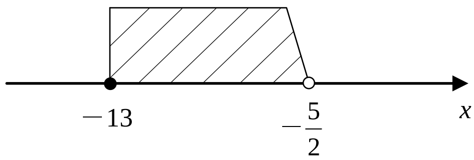
$$-(2x+5) \leqq -x+8$$
$$-2x-5 \leqq -x+8$$

よって　$-x \leqq 13$

これを解いて　$x \geqq -13$

これと $x<-\dfrac{5}{2}$ の共通範囲は

$$-13 \leqq x < -\frac{5}{2} \quad \cdots\cdots②$$



（ｉ），（ⅱ）から，不等式の解は，①，②を合わせて

$\boldsymbol{-13 \leqq x \leqq 1}$

研究１　**整数部分・小数部分**

$\sqrt{6}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　a　　(2)　b　　(3)　$\dfrac{a}{b}$

要　点

x を $x>0$ の実数とする。

$n \leqq x < n+1$ を満たす 0 以上の整数 n を x の **整数部分**，$x-n$ の値を x の **小数部分** という。

$\sqrt{x}$ の整数部分を調べるには，$n^2 \leqq x < (n+1)^2$ となる整数 n を見つけるとよい。

解答

(1)　$\sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9}$ であるから　$2 < \sqrt{6} < 3$

よって，$\sqrt{6}$ の整数部分 a は　$a = \mathbf{2}$

(2)　$b = \boldsymbol{\sqrt{6} - 2}$

(3)　$\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{\sqrt{6}-2} = \dfrac{2(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} = \dfrac{2(\sqrt{6}+2)}{6-4}$

$= \boldsymbol{\sqrt{6} + 2}$

研究２　**二重根号**

次の式を簡単な形にせよ。

(1)　$\sqrt{8+2\sqrt{15}}$　　(2)　$\sqrt{6-2\sqrt{5}}$　　(3)　$\sqrt{9+4\sqrt{5}}$　　(4)　$\sqrt{4-\sqrt{7}}$

要　点

次の形のとき，二重根号をはずして式を簡単にすることができる。

$\boxed{1}$　$a>0$，$b>0$ のとき　$\boldsymbol{\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}}$

$\boxed{2}$　$a>b>0$ のとき　$\boldsymbol{\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}}$

〈注意〉上の公式は両辺を 2 乗して確かめることができる。

$\boxed{2}$は，（左辺）>0 から，右辺は $\sqrt{大} - \sqrt{小}$ となることに注意する。

(3)，(4)　公式が利用できる形に変形する。

解答

(1)　$\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\cdot 3}}=\boldsymbol{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

(2)　$\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(5+1)-2\sqrt{5\cdot 1}}=\sqrt{5}-\sqrt{1}=\boldsymbol{\sqrt{5}-1}$

(3)　$\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{9+2\sqrt{20}}=\sqrt{(5+4)+2\sqrt{5\cdot 4}}=\sqrt{5}+\sqrt{4}=\boldsymbol{\sqrt{5}+2}$

(4)　$\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{7}}{2}}=\sqrt{\dfrac{(7+1)-2\sqrt{7\cdot 1}}{2}}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}}$

研究３　**対称式の値**

$x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$　のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$x+y$，xy　　(2)　x^2+y^2　　(3)　x^3+y^3

要　点

x，y に関する式で，文字 x と y を入れ替えても，もとの式と同じ式になるものを，x と y の **対称式** という。x，y の対称式のうち，$x+y$，xy を基本対称式という。対称式は基本対称式で表すことができる。

(2)，(3)　次の等式を利用する。

$$\boldsymbol{x^2+y^2=(x+y)^2-2xy} \qquad \boldsymbol{x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)}$$

〈注意〉上の等式は右辺を展開して確かめることができる。

解答

(1)　$x+y=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{(2-\sqrt{2})^2+(2+\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\dfrac{4-4\sqrt{2}+2+4+4\sqrt{2}+2}{4-2}=\mathbf{6}$

$xy=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\mathbf{1}$

(2)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\cdot 1$

$=\mathbf{34}$

(3)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=6^3-3\cdot 1\cdot 6=216-18$

$=\mathbf{198}$