集合と論理

$\boxed{1}$　**集合と要素**

(1)　集合 $A=\{2n \mid 1\leqq n\leqq 5,\ n$ は整数$\}$ を，要素を書き並べて表せ。また，次の①～⑤から誤っているものをすべて選べ。

①　$4\in A$　　②　$5\notin A$　　③　$3\in A$　　④　$6\in A$　　⑤　$8\notin A$

(2)　集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8\}$，$B=\{2n-1 \mid 1\leqq n\leqq 3,\ n$ は整数$\}$，$C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，空集合 ϕ とする。次の①～⑤から正しいものをすべて選べ。

①　$B\subset A$　　②　$C\subset A$　　③　$A\subset A$　　④　$B=C$　　⑤　$\phi\subset A$

(3)　$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ を全体集合とする。U の部分集合 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$，$B=\{2,\ 3,\ 5\}$ について，次の集合を求めよ。

①　$A\cap B$　　②　$A\cup B$　　③　$\overline{A}$　　④　$\overline{B}$

要　点

集合と要素

ある性質をもっているかもっていないかが明確に区別できるものの集まりを **集合** といい，集合を作っている１つ１つのものを，その集合の **要素** という。

a が集合 A の要素であるとき，a は集合 A に **属する** といい，$\boldsymbol{a\in A}$ と表す。

また，b が集合 A の要素でないとき，b は集合 A に **属さない** といい，$\boldsymbol{b\notin A}$ と表す。

集合の表し方

集合を表すには，次の２通りの方法がある。

(1)　要素を１つ１つ書き並べる。　　(2)　要素が満たす条件を示す。

例えば，１桁の奇数全体の集合を A とすると，A には次の①～③のような表し方がある。

①　$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$　　②　$A=\{x \mid 1\leqq x\leqq 9,\ x$ は奇数$\}$　　③　$A=\{2n-1 \mid 1\leqq n\leqq 5,\ n$ は整数$\}$

また，集合の要素の個数が多い場合は，省略記号……を用いて次のように表すことがある。

１以上 50 以下の偶数の集合　$\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 50\}$，　　自然数全体の集合　$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\}$

集合の包含関係，空集合

集合 A のすべての要素が集合 B の要素であるとき，すなわち　$x\in A$ ならば $x\in B$　が成り立つとき，A は B に **含まれる** ，または B は A を **含む** といい，$\boldsymbol{A\subset B}$ と表す。このとき，A は B の **部分集合** であるという。集合 A は A 自身の部分集合である。また，２つの集合 A と B の要素がすべて一致するとき，A と B は **等しい** といい，$\boldsymbol{A=B}$ と表す。$A=B$ は，「$A\subset B$ かつ $A\supset B$」と同じである。

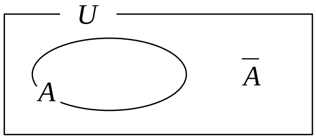
要素が１つもない集合を **空集合** といい，$\boldsymbol{\phi}$ で表す。空集合 ϕ はすべての集合の部分集合であると定める。

共通部分，和集合

２つの集合 A，B のどちらにも属する要素全体の集合を A と B の **共通部分** といい，$\boldsymbol{A\cap B}$ と表す。すなわち，$A\cap B=\{x \mid x\in A$ かつ $x\in B\}$ である。また，２つの集合 A，B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を A と B の **和集合** といい，$\boldsymbol{A\cup B}$ と表す。すなわち，$A\cup B=\{x \mid x\in A$ または $x\in B\}$ である。

３つの場合は　$A\cap B\cap C=\{x \mid x\in A$ かつ $x\in B$ かつ $x\in C\}$，$A\cup B\cup C=\{x \mid x\in A$ または $x\in B$ または $x\in C\}$

全体集合と補集合



1 つの集合 U を定め，その中の部分集合について考えることが多い。このような U を **全体集合** という。

また，全体集合 U の部分集合 A に対して，U の要素で A に属さない要素全体の集合を **補集合** といい，$\overline{A}$ と表す。すなわち，$\overline{A}=\{x \mid x\in U$ かつ $x\notin A\}$ である。

集合 A とその補集合 $\overline{A}$ について，次のことが成り立つ。

・$A\cap\overline{A}=\phi$　　・$A\cup\overline{A}=U$　　・$\overline{\overline{A}}=A$

解答

(1)　集合 A を，要素を書き並べて表すと　$\boldsymbol{A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}}$

また，①　$4\in A$　は正しい。　②　$5\notin A$　は正しい。　③　$3\in A$　は誤り。

④　$6\in A$　は正しい。　⑤　$8\notin A$　は誤りである。

したがって，誤っているものは　**③，⑤**

(2)　集合 B を，要素を書き並べて表すと　$B=\{1,\ 3,\ 5\}$

①　B の要素はすべて A にも属しているので B は A に含まれる，よって，$B\subset A$ は正しい。

②　C の要素の中で，7 は A に属していないので C は A に含まれない。よって，$C\subset A$ は誤り。

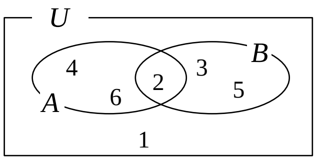
③　集合 A は A 自身の部分集合である。よって，$A\subset A$ は正しい。

④　B と C の要素は一致していない。よって，$B=C$ は誤り。

⑤　空集合 ϕ は，すべての集合の部分集合である。よって，$\phi\subset A$ は正しい。

以上から，正しいものは　**①，③，⑤**

(3)　U，A，B は右の図のように表すことができる。



よって　①　$\boldsymbol{A\cap B=\{2\}}$　　②　$\boldsymbol{A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}}$

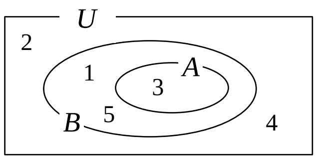
③　$\boldsymbol{\overline{A}=\{1,\ 3,\ 5\}}$

④　$\boldsymbol{\overline{B}=\{1,\ 4,\ 6\}}$

ポイント

・補集合について，$A\subset B$　ならば　$\overline{A}\supset\overline{B}$　が成り立つ。

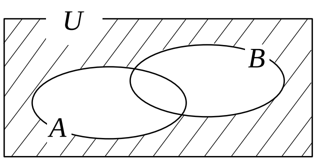
これは，例えば $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$A=\{3\}$，$B=\{1,\ 3,\ 5\}$として，右の図から確かめることができる。



・ド・モルガンの法則

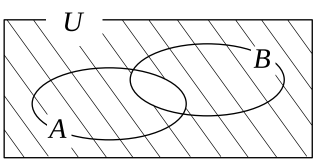
次のことが成り立つ。

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$



$A\cup B$ の補集合は，$\overline{A}$ と $\overline{B}$ の共通部分になっている。

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$



$A\cap B$ の補集合は，$\overline{A}$ と $\overline{B}$ の和集合になっている。

2　命題の真偽

次の命題の真偽を調べよ。

(1)　実数 a について，$a^2=0$ ならば $a=0$　　(2)　実数 x について，$x^2=1$ ならば $x=1$

要　点

命題と条件

正しいか正しくないかが明確に決まる式や文を **命題** という。命題が正しいときは **真** であるといい，正しくないときは **偽** であるという。

「x は奇数である」という文は，x の値が決まると真偽が判定できる。このような文字 x を含んだ文や式を，x に関する **条件** という。

2 つの条件 p，q についての命題「p ならば q」を $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ と表し，p をこの命題の **仮定**，q をこの命題の **結論** という。

条件と集合

2 つの条件 p，q を満たすものの全体の集合をそれぞれ P，Q とする。命題「$p \Rightarrow q$」が真であるとき，条件 p を満たすものは必ず条件 q を満たすから，$P \subset Q$ が成り立つ。逆に $P \subset Q$ ならば，$p \Rightarrow q$ が真であることがいえる。また，命題「$p \Rightarrow q$」が偽であるとき，P の中に q を満たさない要素（Q からはみ出す要素）が少なくとも 1 つある。このはみ出す要素を，命題が偽であることを示す **反例** という。

解答

(1)　$a^2=0$ のとき，$a=0$ であるから　**真**

(2)　$x^2=1$ のとき，$x=\pm 1$ であるから　**偽**

別解 1　反例を示す。

$x=-1$ のとき，$x^2=1$ であるが $x=1$ ではない。よって　偽

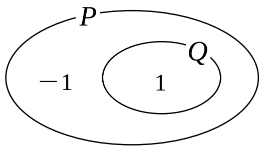
別解 2　集合で考える。

集合 P，Q をそれぞれ

$P=\{x \mid x^2=1,\ x \text{ は実数}\}=\{-1,\ 1\}$

$Q=\{1\}$

とする。右の図から，P は Q に含まれないから　偽



3　必要条件・十分条件

x，y は実数とする。次の$\boxed{}$に当てはまるものを，下の①～④から選べ。

(1)　$x^2=4$ は $x=2$ であるための$\boxed{}$。　(2)　$x=2$ は $x^2=4$ であるための$\boxed{}$。

(3)　$x^2+y^2=0$ は $x=y=0$ であるための$\boxed{}$。　(4)　$x>y$ は $x^2>y^2$ であるための$\boxed{}$。

①　必要十分条件である

②　必要条件であるが十分条件ではない

③　十分条件であるが必要条件ではない

④　必要条件でも十分条件でもない

要　点

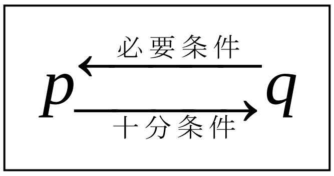
必要条件・十分条件

2 つの条件 p，q について，命題「$p \Rightarrow q$」が真であるとき，

　　q は p であるための **必要条件** ，　　　p は q であるための **十分条件**

であるという。命題「$p \Rightarrow q$」と「$q \Rightarrow p$」がともに真であるとき，p は q であるための **必要十分条件** であるという。また，このとき，p と q は **同値** であるといい， $\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$ と表す。

解答



(1)　$x^2=4 \Rightarrow x=2$　は偽　（反例は　$x=-2$）

　$x=2 \Rightarrow x^2=4$　は真

　よって　②

(2)　$x=2 \Rightarrow x^2=4$　は真

　$x^2=4 \Rightarrow x=2$　は偽　（反例は　$x=-2$）

　よって　③

　〈注意〉(1)の結果から即答してもよい。

(3)　x，y は実数であるから，$x^2 \geqq 0$，$y^2 \geqq 0$ であり，

　$x^2=0$ のとき $x=0$，$y^2=0$ のとき $y=0$ である。

　よって，$x \neq 0$ のとき $x^2>0$，$y \neq 0$ のとき $y^2>0$ となるから

　$x^2+y^2=0 \Rightarrow x=y=0$　は真

　$x=y=0 \Rightarrow x^2+y^2=0$　は真

　したがって　①

(4)　$x>y \Rightarrow x^2>y^2$　は偽　（反例は　$x=2$，$y=-3$）

　$x^2>y^2 \Rightarrow x>y$　は偽　（反例は　$x=-3$，$y=2$）

　よって　④

命題：マグロは魚である。

・「マグロ」であることは，それが「魚」であるために“十分”な条件である。

・「魚」であることは，それが「マグロ」であるために“必要”な条件である。

ポイント

集合と必要条件・十分条件

条件 p，q を満たすもの全体の集合を，それぞれ P，Q とすると次のことが成り立つ。

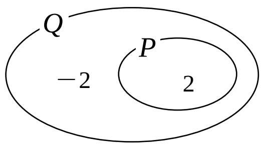
　　「$p \Rightarrow q$　が真」 $\Leftrightarrow$ $P \subset Q$ $\Leftrightarrow$ p は q の十分条件

　　　　　　　　　　　　　　　q は p の必要条件

これは(2)において，p : $x=2$ に対して　$P=\{2\}$，

　　　　　　　　q : $x^2=4$ に対して　$Q=\{-2,\ 2\}$

から確かめることができる。



また，次のことが成り立つ。

　　「$p \Leftrightarrow q$　が真」 $\Leftrightarrow$ $P=Q$ $\Leftrightarrow$ p と q は同値である。

$\boxed{4}$ **対偶を利用した命題の証明**

n を整数とし，x，y を実数とする。次の命題を証明せよ。

(1)　n が 3 の倍数でないならば，n は 6 の倍数ではない。

(2)　$x+y>0$ ならば，「$x>0$ または $y>0$」である。

要　点

条件の否定

条件 p に対して，「p でない」という条件を p の **否定** といい，$\overline{p}$ と表す。

また，ド・モルガンの法則から次のことが成り立つ。

$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p}$ または $\overline{q}$ ，　　$\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p}$ かつ $\overline{q}$

逆・裏・対偶

命題「$p \Rightarrow q$」に対して，

命題「$q \Rightarrow p$」を **逆** ，

命題「$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$」を **裏** ，

命題「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」を **対偶**

$$\begin{tikzcd}
\boxed{p \Rightarrow q} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{逆}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{裏}"'] \arrow[drr, leftrightarrow, "\text{対偶}"] & & \boxed{q \Rightarrow p} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{裏}"] \arrow[dll, leftrightarrow] \\
\boxed{\overline{p} \Rightarrow \overline{q}} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{逆}"'] & & \boxed{\overline{q} \Rightarrow \overline{p}}
\end{tikzcd}$$

という。逆，裏，対偶について，一般に次の関係がある。

$\boxed{1}$　命題が真であっても，その逆や裏は真であるとは限らない。

$\boxed{2}$　命題の真偽と，その対偶の真偽は一致する。

$\boxed{2}$ から，命題「$p \Rightarrow q$」が真であることを証明する代わりに，その対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」が真であることを証明してもよい。

証明

(1)　与えられた命題の対偶は，　n が 6 の倍数ならば，n は 3 の倍数である。

集合 $P=\{6l \mid l$ は整数$\}$，　$Q=\{3m \mid m$ は整数$\}$ を考えると，$P \subset Q$ であるから，対偶は真である。

よって，もとの命題も真である。

(2)　与えられた命題の対偶は，　「$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$」ならば，$x+y \leqq 0$ である。

よって，対偶は真であるから，もとの命題も真である。

5　背理法

r，s は有理数で，$s\neq 0$ とする。$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，$r+s\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

要　点

背理法

命題が成り立たないと仮定して推論を行い，矛盾を導くことにより，もとの命題が真であることを証明する方法を，**背理法** という。

証明

$r+s\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると，$r+s\sqrt{2}$ は有理数である。よって，t を有理数とすると

$$r+s\sqrt{2}=t$$

とおける。このとき，$s\neq 0$ から，$\sqrt{2}=\dfrac{t-r}{s}$ と変形できる。

r，s，t は有理数であるから，$\dfrac{t-r}{s}$ も有理数となり，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$r+s\sqrt{2}$ は無理数である。

研究　$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明

$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。ただし，n を自然数とするとき，n^2 が偶数ならば，n は偶数であることを用いてよいものとする。

証明

$\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると，1 以外に正の公約数をもたない自然数 a，b を用いて

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$$

と表すことができる。このとき　$a=\sqrt{2}\,b$

両辺を 2 乗すると　$a^2=2b^2$　……①

これより，a^2 は偶数であるから，a も偶数である。よって，ある自然数 c を用いて，$a=2c$ と表すことができる。これを①に代入すると

$$4c^2=2b^2 \qquad \text{すなわち} \quad b^2=2c^2$$

これより，b^2 は偶数であるから，b も偶数である。

以上から，a，b はともに偶数である。

これは，a，b が 1 以外に正の公約数をもたないことに矛盾する。

したがって，$\sqrt{2}$ は無理数である。