# 指数関数・対数関数

## 1　指数の計算

次の計算をせよ。ただし，(2)では　$a\neq 0$，$b\neq 0$，　(3)では　$a>0$，$b>0$ とする。

(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times 4^3\div 2^4$　　(2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3\div\dfrac{b^3}{a^2}\times\left(\dfrac{b}{a^2}\right)^4$

(3) $\sqrt[3]{ab^2}\times\sqrt[6]{a}\div\sqrt{b}\times\sqrt[3]{\dfrac{b}{a^3}}$　　(4) $\sqrt[3]{-216}\times 32^{-0.2}$

### 要　点

$m$，$n$ が正の整数のとき，次の指数法則が成り立つ。

・$a^m a^n=a^{m+n}$　　・$(a^m)^n=a^{mn}$　　・$(ab)^n=a^n b^n$

指数を拡張したとき，次のようになる。

**0 や負の整数の指数**

$a\neq 0$ で，$n$ が正の整数のとき　$a^0=1$，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

**指数法則(1)**　$a\neq 0$，$b\neq 0$ で，$m$，$n$ が整数のとき…上記から負も含む整数で指数法則が成り立つ。

・$a^m a^n=a^{m+n}$　　・$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$　　・$(a^m)^n=a^{mn}$　　・$(ab)^n=a^n b^n$　　・$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

**累乗根の定義**　　$a$ **の** $n$ **乗根**…$n$ 乗すると $a$ になる数である。実数の範囲では次のことがいえる。

(ⅰ) $n$ が奇数のとき…$a$ の正負に関係なく，$a$ の $n$ 乗根はただ 1 つ存在する。
これを，$\sqrt[n]{a}$　で表す。このとき，$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$　である。

(ⅱ) $n$ が偶数のとき…$a>0$ であれば，$a$ の $n$ 乗根は正と負の 1 つずつ存在する。このうち，正の方を $\sqrt[n]{a}$，
負の方を $-\sqrt[n]{a}$　と表す。$a<0$ であれば，$a$ の $n$ 乗根は存在しない。

〈注意〉$n$ が偶数，奇数に関係なく，$\sqrt[n]{0}=0$ である。

**累乗根の性質**　$a>0$，$b>0$ で，$m$，$n$，$p$ が正の整数のとき

・$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　・$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　　・$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　　・$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　　・$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

**有理数の指数**　$a>0$ で，$m$，$n$ が正の整数，$r$ が正の有理数のとき

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$　　特に　$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，　$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$

**指数法則(2)**　$a>0$，$b>0$ で，$r$，$s$ が有理数のとき…以上から，有理数の範囲で指数法則が成り立つ。

・$a^r a^s=a^{r+s}$　　・$\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$　　・$(a^r)^s=a^{rs}$　　・$(ab)^r=a^r b^r$　　・$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$

〈注意〉例えば，$\sqrt{3}=1.732$……に対して，$2^{1.7}$，$2^{1.73}$，$2^{1.732}$，……は一定の値に近づく。この値を $2^{\sqrt{3}}$ と定める。一般に，$a>0$ のとき任意の実数 $x$ に対して $a^x$ を定めることができ，指数法則(2)において，$r$，$s$ が実数の場合でも成り立つ。

## 解答

(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times4^3\div2^4=(2^{-1})^2\times(2^2)^3\times\dfrac{1}{2^4}=2^{-2}\cdot2^6\cdot2^{-4}=2^{-2+6-4}=2^0=\mathbf{1}$

(2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3\div\dfrac{b^3}{a^2}\times\left(\dfrac{b}{a^2}\right)^4=(ab^{-1})^3\div(b^3a^{-2})\times(ba^{-2})^4=a^3b^{-3}\times b^{-3}a^2\times b^4a^{-8}$

$=a^3\cdot a^2\cdot a^{-8}\times b^{-3}\cdot b^{-3}\cdot b^4=a^{3+2-8}\cdot b^{-3-3+4}=a^{-3}b^{-2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{a^3b^2}}$

(3) $\sqrt[3]{ab^2}\times\sqrt[6]{a}\div\sqrt{b}\times\sqrt[3]{\dfrac{b}{a^3}}=(ab^2)^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}\div b^{\frac{1}{2}}\times(ba^{-3})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}\times b^{-\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-1}$

$=a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}\cdot a^{-1}\times b^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-1}\cdot b^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{b}{a}}}$

(4) $\sqrt[3]{-216}=\sqrt[3]{(-6)^3}=-6,\quad 32^{-0.2}=(2^5)^{-\frac{1}{5}}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

よって　$\sqrt[3]{-216}\times32^{-0.2}=(-6)\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{-3}$

### 2　式の値

(1)　$x>0$，$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$ のとき，次の値を求めよ。

①　$x+x^{-1}$　　②　$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$

(2)　$2^x-2^{-x}=3$ のとき，次の値を求めよ。

①　$4^x+4^{-x}$　　②　$2^x+2^{-x}$

### 要　点

(1)，(2)ともに，①は与えられた条件式の両辺を 2 乗して求める。

(1)の②は，$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$ を$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^3$とみて因数分解をする方法や，$\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)(x+x^{-1})$を計算することにより求める方法がある。

(2)の②は，$(2^x+2^{-x})^2$ を計算し，$2^x$，$2^{-x}$ の正負から $2^x+2^{-x}$ の正負を判断し値を求める。

## 解答

(1)　①　$\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2+2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=x+2+x^{-1}$

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$ から　$9=x+2+x^{-1}$　　よって　$x+x^{-1}=\mathbf{7}$

② $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^3=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)\left\{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2-x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2\right\}=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)(x-1+x^{-1})$

$=3(7-1)=\mathbf{18}$

別解 $\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)(x+x^{-1})=x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3$

よって $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=3\cdot 7-3=18$

(2) ① $(2^x-2^{-x})^2=(2^x)^2-2\cdot 2^x\cdot(2^{-x})+(2^{-x})^2=2^{2x}-2+2^{-2x}=2^{2x}+2^{-2x}-2$

ここで，$(2^x-2^{-x})^2=9$，$2^{2x}=4^x$，$2^{-2x}=4^{-x}$ であるから $9=4^x+4^{-x}-2$ よって $4^x+4^{-x}=\mathbf{11}$

② $(2^x+2^{-x})^2=(2^x)^2+2\cdot 2^x\cdot(2^{-x})+(2^{-x})^2=4^x+4^{-x}+2$ ①から $(2^x+2^{-x})^2=11+2=13$

ここで，$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから $2^x+2^{-x}>0$ よって $2^x+2^{-x}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$

**3 指数関数のグラフ**

次の関数のグラフをかき，$y=2^x$ との位置関係を答えよ。

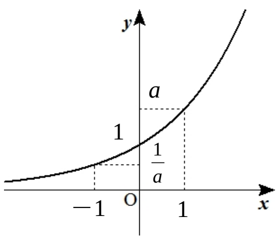
(1) $y=2^{x-1}$　(2) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　(3) $y=4\cdot 2^x+1$

**要 点**

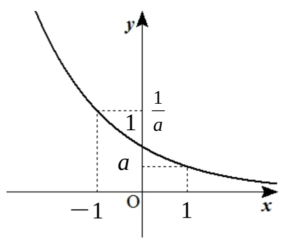
**指数関数のグラフ**

$y=a^x$ のグラフは次のようになる。ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする。

・$a>1$ のとき




・$0<a<1$ のとき




性質 1 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$を通り，$x$ 軸を漸近線とする曲線となる。

性質 2 $a>1$ のときは増加関数（右上がり），$0<a<1$ のときは減少関数（右下がり）である。

〈注意〉$a>0$，$a\neq 1$ のとき， $r=s \Leftrightarrow a^r=a^s$ が成り立つ。

**グラフの平行移動**

$y=f(x)$のグラフを $x$ 軸方向に $p$，$y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動したグラフは，$y-q=f(x-p)$ となる。

**グラフの対称移動**

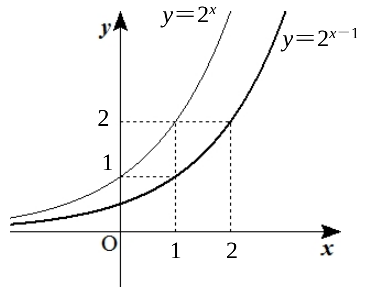
$y=f(x)$のグラフを $x$ 軸に関して対称移動すると $y=-f(x)$

$y$ 軸に関して対称移動すると $y=f(-x)$

原点に関して対称移動すると $y=-f(-x)$

## 解答

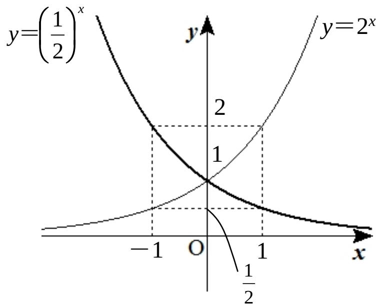
(1)　$f(x)=2^x$ とすると，$2^{x-1}=f(x-1)$であるので，**$y=2^{x-1}$ のグラフは $y=2^x$ のグラフを $x$ 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフ**である。




(2)　$f(x)=2^x$ とする。

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=(2^{-1})^x=2^{-x}=f(-x)$$

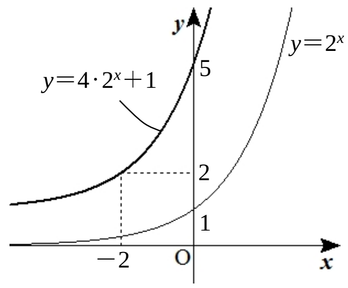
であるので，**$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $y=2^x$ のグラフを $y$ 軸に関して対称移動したグラフ**である。




(3)　$f(x)=2^x$ とする。

$$4\cdot2^x+1=2^2\cdot2^x+1=2^{2+x}+1=f(x+2)+1$$

であるので，**$y=4\cdot2^x+1$ のグラフは $y=2^x$ のグラフを $x$ 軸方向に$-2$，$y$ 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフ**である。




$\boxed{4}$　**累乗・累乗根の大小比較**

(1)　次の 3 数の大小を比較せよ。　$\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sqrt[5]{\frac{1}{9}}$

(2)　次の 2 数の大小を比較せよ。　$\sqrt[4]{3}$，$\sqrt[5]{4}$

### 要　点

(1)　底をそろえて，次のことを利用する。

$a>1$ のとき　　$r<s \Leftrightarrow a^r<a^s$

$0<a<1$ のとき　$r<s \Leftrightarrow a^r>a^s$

(2)　底がそろえられないときは，何乗かして整数にする。本問では 4 と 5 の公倍数であることからそれぞれを 20 乗する。

## 解答

(1) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=(3^{-1})^{\frac{1}{3}}=3^{-\frac{1}{3}}$，　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{3}=3^{\frac{1}{2}}\times 3^{-1}=3^{\frac{1}{2}-1}=3^{-\frac{1}{2}}$，

$\sqrt[5]{\dfrac{1}{9}}=\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{5}}=\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{5}}=\{(3^{-1})^2\}^{\frac{1}{5}}=3^{-\frac{2}{5}}$

底 3 は 1 より大きく，指数の大小は　$-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{10}{30}$，$-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{15}{30}$，$-\dfrac{2}{5}=-\dfrac{12}{30}$　より

$-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{2}{5}<-\dfrac{1}{3}$　であるから　$3^{-\frac{1}{2}}<3^{-\frac{2}{5}}<3^{-\frac{1}{3}}$　　すなわち　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\sqrt[5]{\dfrac{1}{9}}<\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}}$

(2)　$\sqrt[4]{3}$，$\sqrt[5]{4}$ のそれぞれを 20 乗すると

$$\left(\sqrt[4]{3}\right)^{20}=\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{20}=3^5=243,\qquad \left(\sqrt[5]{4}\right)^{20}=\left(4^{\frac{1}{5}}\right)^{20}=4^4=256$$

243＜256 であるから　$\boldsymbol{\sqrt[4]{3}<\sqrt[5]{4}}$

**5**　**指数方程式・指数不等式**

次の方程式，不等式を解け。

(1)　$7^{x+1}=\dfrac{1}{49}$　　(2)　$7^{x+1}<\dfrac{1}{49}$

(3)　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x}>\dfrac{1}{8}$　　(4)　$9^x-4\cdot 3^x+3=0$

**要　点**

まず，底をそろえる。

方程式については，$a>0$，$a\neq 0$ で $a^x=a^y$ のとき，$x=y$ であることを利用する。

不等式については，底と 1 の大小関係に注意して不等号の向きを判断する。

## 解答

(1)　$\dfrac{1}{49}=7^{-2}$ より　$7^{x+1}=7^{-2}$　　よって　$x+1=-2$　　したがって　$\boldsymbol{x=-3}$

(2)　(1)より　$7^{x+1}<7^{-2}$　　底 7 は 1 より大きいから　$x+1<-2$　　したがって　$\boldsymbol{x<-3}$

(3)　底を 2 にそろえる。

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x}=(2^{-2})^x=2^{-2x}$，　$\dfrac{1}{8}=2^{-3}$　　よって　$2^{-2x}>2^{-3}$

底 2 は 1 より大きいから　$-2x>-3$　　したがって　$\boldsymbol{x<\dfrac{3}{2}}$

別解　底を$\frac{1}{2}$にそろえる。

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x},\quad \frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad \text{よって}\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}>\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

底$\frac{1}{2}$は 1 より小さいから　$2x<3$　　したがって　$x<\frac{3}{2}$

(4)　$9^x=(3^2)^x=3^{2x}=(3^x)^2$ より　$(3^x)^2-4\cdot3^x+3=0$　　ここで，$3^x=t$ とおくと　$t>0$

このとき，方程式は　$t^2-4t+3=0$　　$(t-1)(t-3)=0$　　$t>0$ であるから　$t=1,\ 3$

すなわち　$3^x=1,\ 3$　　これを解いて　$\boldsymbol{x=0,\ 1}$

6　**指数関数の最大・最小**

(1)　関数 $y=2^{2x+1}-2^{x+1}+3\ (x\leqq2)$ における最大値と最小値を求めよ。

(2)　$y=3^x+3^{-x}-2(9^x+9^{-x})$ とする。$3^x+3^{-x}=t$ とおくとき，$y$ を $t$ を用いて表せ。

また，関数 $y$ の最大値を求めよ。

**要　点**

(1)　$2^x=t$ とおくと，$y$ は $t$ の 2 次式になる。$t$ の範囲に注意して最大値，最小値を求める。

(2)　$t$ の範囲を，相加平均と相乗平均の大小関係を利用して調べる。

## 解答

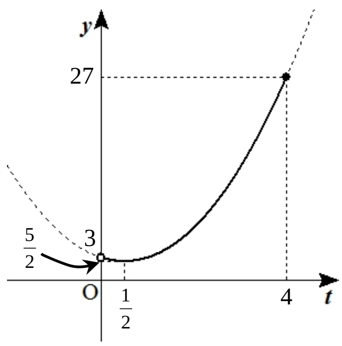
(1)　$2^x=t$ とおくと　$t>0$　　また，$x\leqq2$ であるから　$0<t\leqq4$

このとき関数は　$y=2^{2x+1}-2^{x+1}+3=2\cdot(2^x)^2-2\cdot2^x+3$

$$=2t^2-2t+3=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$$

$0<t\leqq4$ であるから，右のグラフより，$t=4$ のとき最大値 27

をとり，$t=\frac{1}{2}$ のとき最小値$\frac{5}{2}$をとる。




$t=4$ のとき　$2^x=4$　　よって　$x=2$，　$t=\frac{1}{2}$ のとき　$2^x=\frac{1}{2}$　　よって　$x=-1$

したがって，この関数は　**$x=2$ のとき最大値 27** をとり，**$x=-1$ のとき最小値$\frac{5}{2}$**をとる。

(2)　$(3^x+3^{-x})^2=(3^x)^2+2\cdot3^x\cdot3^{-x}+(3^{-x})^2=3^{2x}+2\cdot3^{x-x}+3^{-2x}=(3^2)^x+2\cdot3^0+(3^2)^{-x}=9^x+2+9^{-x}$

よって，$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$ と表すことができる。

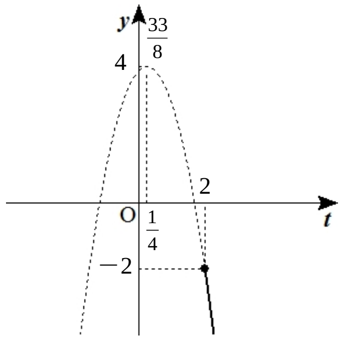
したがって　$y=3^x+3^{-x}-2(9^x+9^{-x})=t-2(t^2-2)\boldsymbol{=-2t^2+t+4}$

また，$3^x>0$，$3^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$t=3^x+3^{-x} \geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$$

ここで　$y=-2t^2+t+4=-2\left(t^2-\frac{1}{2}t\right)+4=-2\left\{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right\}+4$

$$=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{33}{8}$$




右のグラフより，$t=2$ のとき最大値$-2$ をとる。

ここで　$t=2$　　すなわち　$3^x+3^{-x}=2$ を満たす $x$ は

相加平均と相乗平均の大小関係において等号が成立しているときであるから

$3^x=3^{-x}$　　よって　$x=-x$　　$x=0$

したがって，この関数は　**$x=0$ のとき最大値$-2$** をとる。

$\boxed{7}$　**対数の計算**

(1)　次の対数の値を求めよ。

①　$\log_2 4$　　　②　$\log_5 \frac{1}{25}$

(2)　次の式を簡単にせよ。

①　$\log_{12}3+\log_{12}4$　　　②　$\log_2 3-\log_2 6$

(3)　次の式を簡単にせよ。

①　$\log_{27}9$　　　②　$\log_2 5\cdot\log_5 4$　　　③　$\log_2 12-2$

**要　点**

**対数と指数の対応**

$a>0$，$a\neq1$，$M>0$ で，$p$ が実数のとき　$M=a^p \Leftrightarrow \log_a M=p$　と定義する。

この $p$ の値を，$a$ を底とする $M$ の対数といい，$M$ をこの対数の真数という。

定義により　$\log_a a^p=p$　　特に　$\log_a a=1$，$\log_a 1=0$，$\log_a \frac{1}{a}=-1$

**対数の性質**

$a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$N>0$ で，$k$ が実数のとき

- $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
- $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
- $\log_a \frac{1}{N}=-\log_a N$
- $\log_a M^k=k\log_a M$
- $\log_a \sqrt[N]{M}=\frac{1}{N}\log_a M$

**底の変換公式**

$a$，$b$，$c$ は正の数で，$a\neq1$，$b\neq1$，$c\neq1$ のとき　$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$　　特に　$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

## 解答

(1)　①　$\log_2 4=\log_2 2^2=\mathbf{2}$

　　②　$\log_5 \dfrac{1}{25}=\log_5 5^{-2}=\mathbf{-2}$

(2)　①　$\log_{12}3+\log_{12}4=\log_{12}3\cdot 4=\log_{12}12=\mathbf{1}$

　　②　$\log_2 3-\log_2 6=\log_2\dfrac{3}{6}=\log_2\dfrac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=\mathbf{-1}$

(3)　①　底を 3 に変換する。　$\log_{27}9=\dfrac{\log_3 9}{\log_3 27}=\dfrac{\log_3 3^2}{\log_3 3^3}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

　　②　底を 2 にそろえる。　$\log_2 5\cdot\log_5 4=\log_2 5\cdot\dfrac{\log_2 4}{\log_2 5}=\log_2 4=\log_2 2^2=\mathbf{2}$

　　③　$\log_2 12=\log_2 4\cdot 3=\log_2 4+\log_2 3=\log_2 2^2+\log_2 3=2+\log_2 3$ より　$\log_2 12-2=(2+\log_2 3)-2=\mathbf{\log_2 3}$

$\boxed{8}$　対数の表現

$\log_2 5=a$，$\log_5 7=b$ とするとき，$\log_{10}35$ を $a$，$b$ で表せ。

**要　点**

底の変換公式を利用して底をそろえることを考える。

本問では，$\log_2 5=a$ が与えられており，$10=2\times5$，$35=5\times7$ であることから底を 2 にそろえる。

## 解答

$\log_{10}35=\dfrac{\log_2 35}{\log_2 10}=\dfrac{\log_2(5\cdot7)}{\log_2(2\cdot5)}=\dfrac{\log_2 5+\log_2 7}{\log_2 2+\log_2 5}=\dfrac{a+\log_2 7}{1+a}$

ここで，$b=\log_5 7=\dfrac{\log_2 7}{\log_2 5}=\dfrac{\log_2 7}{a}$ であるから　$\log_2 7=ab$　　よって　$\log_{10}35=\boldsymbol{\dfrac{a+ab}{1+a}}$

**9　対数関数のグラフ**

次の空欄を埋めよ。

$y=-\log_{\frac{1}{9}}3(x+1)^2$ のグラフは，$y=\log_3 x$ のグラフを $x$ 軸方向に［　　］，$y$ 軸方向に［　　］だけ平行移動したグラフである。

**要　点**

**指数関数のグラフと対数関数のグラフの対応関係**

指数関数 $y=2^x$ のグラフ上に点$(a,\ b)$があるとする。

$b=2^a \Leftrightarrow a=\log_2 b$

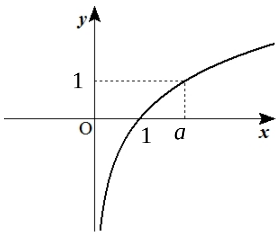
であるから，点$(b,\ a)$は曲線 $y=\log_2 x$ 上にある。点$(a,\ b)$と点$(b,\ a)$は直線 $y=x$ に関して対称であるから，$y=\log_2 x$ のグラフと $y=2^x$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称である。

一般に，対数関数 $y=\log_a x$ のグラフと指数関数 $y=a^x$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称である。

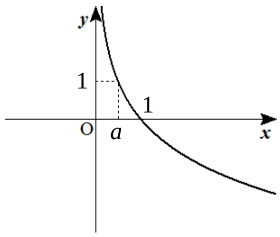
**対数関数のグラフ**

$y=\log_a x$ のグラフは次のようになる。ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする。

・$a>1$ のとき




・$0<a<1$ のとき




性質［1］　$(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$を通り，$y$ 軸を漸近線とする曲線となる。

性質［2］　$a>1$ のときは増加関数（右上がり），$0<a<1$ のときは減少関数（右下がり）である。

〈注意〉$a>0$，$a\neq 1$ で，$r>0$，$s>0$ のとき，　$r=s \Leftrightarrow \log_a r=\log_a s$　が成り立つ。

## 解答

底の変換公式を利用して，$-\log_{\frac{1}{9}}3(x+1)^2$ の底を 3 に変換する。

$$-\log_{\frac{1}{9}}3(x+1)^2=-\frac{\log_3 3(x+1)^2}{\log_3\frac{1}{9}}=-\frac{\log_3 3+\log_3(x+1)^2}{\log_3 3^{-2}}=-\frac{1+2\log_3(x+1)}{-2}=\frac{1}{2}+\log_3(x+1)$$

$f(x)=\log_3 x$ とすると，$\log_3(x+1)=f(x+1)$であるから，$y=-\log_{\frac{1}{9}}3(x+1)^2$ のグラフは $y=\log_3 x$ のグラフを

$x$ 軸方向に $\boldsymbol{-1}$，$y$ 軸方向に $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ だけ平行移動したグラフである。

**１０**　**対数の大小比較**

(1)　次の 3 数の大小を比較せよ。

①　$\log_3 10$，2，$3\log_3 2$　　　②　$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$，$1+\log_{\frac{1}{2}}3$，$-\dfrac{1}{2}$

(2)　次の 2 数の大小を比較せよ。　　$\log_3 4$，$\log_8 9$

**要　点**

(1)　底をそろえて，次のことを利用する。

$a>1$ のとき　　$0<r<s \Leftrightarrow \log_a r<\log_a s$

$0<a<1$ のとき　$0<r<s \Leftrightarrow \log_a r>\log_a s$

(2)　底がそろえられないので，2 数の差の正負を調べる。

## 解答

(1)　①　$2=2\cdot\log_3 3=\log_3 3^2=\log_3 9$　　　$3\log_3 2=\log_3 2^3=\log_3 8$

底 3 は 1 より大きく，$8<9<10$ であるから　$\log_3 8<\log_3 9<\log_3 10$

すなわち　$\boldsymbol{3\log_3 2<2<\log_3 10}$

②　$1+\log_{\frac{1}{2}}3=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}3=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\cdot 3\right)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3}{2}$

$-\dfrac{1}{2}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\log_{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}}=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$

底$\dfrac{1}{2}$は 1 より小さく，$\sqrt{2}<\dfrac{3}{2}$ であるから　$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}>\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3}{2}$

すなわち　$\boldsymbol{1+\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=-\dfrac{1}{2}}$

(2)　$P=\log_3 4-\log_8 9$ とおく。

$$P=\frac{\log_2 4}{\log_2 3}-\frac{\log_2 9}{\log_2 8}=\frac{\log_2 2^2}{\log_2 3}-\frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^3}=\frac{2}{\log_2 3}-\frac{2\log_2 3}{3}=\frac{6-2(\log_2 3)^2}{3\log_2 3}$$

$$=\frac{2}{3\log_2 3}\{3-(\log_2 3)^2\}$$

ここで　$3-(\log_2 3)^2=(\sqrt{3}+\log_2 3)(\sqrt{3}-\log_2 3)$　　　$\log_2 3>0$ より　$\dfrac{2}{3\log_2 3}>0$，$\sqrt{3}+\log_2 3>0$

であるから，$\sqrt{3}-\log_2 3$ の正負と $P$ の正負が一致する。ここで，$\sqrt{3}>\dfrac{5}{3}$ であるから

$\sqrt{3}-\log_2 3>\dfrac{5}{3}-\log_2 3=\dfrac{1}{3}(5-3\log_2 3)=\dfrac{1}{3}(5\cdot\log_2 2-\log_2 3^3)=\dfrac{1}{3}(\log_2 2^5-\log_2 27)=\dfrac{1}{3}(\log_2 32-\log_2 27)>0$

したがって，$P>0$ であるから　$\boldsymbol{\log_3 4>\log_8 9}$

**１１**　**対数方程式・対数不等式**

(1)　$3^{\log_9 25}$ の値を求めよ。

(2)　次の方程式を解け。

①　$\log_3(x+2)=3$　　②　$\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}}(x-3)=-2$

③　$\log_3(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=1$　　④　$(\log_5 x)^2+4\log_5 5x=0$

(3)　次の不等式を解け。ただし，③は $x>0$，$x\neq 1$ とする。

①　$\log_2(2x-1)>2$　　②　$\log_{0.1}x\leqq -1$　　③　$\log_x 3+2\log_3 x\geqq 3$

**要　点**

(1)　$3^{\log_9 25}=x$ とおき，両辺の 3 を底とする対数をとる。

**真数条件**

$a>0$，$a\neq 1$ であるとき，任意の実数 $p$ に対して $a^p>0$ である。

$M=a^p \Leftrightarrow \log_a M=p$

であるので，$a>0$，$a\neq 1$ のとき，対数 $\log_a M$ の真数 $M$ はつねに正である。これを真数条件という。

(2)，(3)　まず，真数条件をチェックする。次に対数の性質を用いて底をそろえる。

方程式については，$a>0$，$a\neq 1$，$x>0$，$y>0$ のとき　$\log_a x=\log_a y \Leftrightarrow x=y$

であることを利用する。

不等式については，底と 1 の大小関係に注意して不等号の向きを判断する。

## 解答

(1)　$3^{\log_9 25}=x$ とおき，両辺の 3 を底とする対数をとると　$\log_3 3^{\log_9 25}=\log_3 x$

$\log_9 25\cdot\log_3 3=\log_3 x$　　すなわち　$\log_9 25=\log_3 x$

ここで　$\log_9 25=\dfrac{\log_3 25}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 5^2}{\log_3 3^2}=\dfrac{2\log_3 5}{2}=\log_3 5$

よって　$\log_3 5=\log_3 x$　　したがって　$\boldsymbol{x=5}$

(2)　①　真数は正であるから　$x+2>0$　　すなわち　$x>-2$　……(ｉ)

方程式を変形すると　$\log_3(x+2)=\log_3 3^3$　　すなわち　$\log_3(x+2)=\log_3 27$

よって，$x+2=27$ から　$\boldsymbol{x=25}$　　これは，(ｉ)を満たす。

②　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x-3>0$　　すなわち　$x>3$　……(ｉ)

方程式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}} x(x-3)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$　　すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x(x-3)=\log_{\frac{1}{2}} 4$

よって　$x(x-3)=4$　　整理すると　$(x+1)(x-4)=0$　　(ｉ)から　$\boldsymbol{x=4}$

③　真数は正であるから　$x-1>0$ かつ $x+1>0$　　すなわち　$x>1$　……(ⅰ)

ここで　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=\dfrac{\log_3(x+1)}{\log_3\frac{1}{3}}=\dfrac{\log_3(x+1)}{\log_3 3^{-1}}=-\log_3(x+1)$

よって，方程式は　$\log_3(x-1)+\log_3(x+1)=1$　　これを変形すると　$\log_3(x-1)(x+1)=\log_3 3$

したがって　$(x-1)(x+1)=3$　　整理すると　$(x+2)(x-2)=0$　　(ⅰ)から　$\boldsymbol{x=2}$

④　真数は正であるから　$x>0$ かつ $5x>0$　　すなわち　$x>0$　……(ⅰ)

ここで　$\log_5 5x=\log_5 5+\log_5 x=1+\log_5 x$　　よって，方程式は　$(\log_5 x)^2+4(1+\log_5 x)=0$

これを整理すると　$(\log_5 x+2)^2=0$　　したがって　$\log_5 x=-2$

$-2$ を変形すると　$-2=\log_5 5^{-2}=\log_5\dfrac{1}{25}$ であるから　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{25}}$　　これは，(ⅰ)を満たす。

(3)　①　真数は正であるから　$2x-1>0$　　すなわち　$x>\dfrac{1}{2}$　……(ⅰ)

不等式を変形すると　$\log_2(2x-1)>\log_2 2^2$　　すなわち　$\log_2(2x-1)>\log_2 4$

底 2 は 1 より大きいから　$2x-1>4$　　よって　$x>\dfrac{5}{2}$　……(ⅱ)

(ⅰ)，(ⅱ)の共通な範囲を求めて　$\boldsymbol{x>\dfrac{5}{2}}$

②　真数は正であるから　$x>0$　……(ⅰ)

ここで　$-1=\log_{0.1}0.1^{-1}=\log_{0.1}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-1}=\log_{0.1}10$

よって，不等式は　$\log_{0.1}x\leqq\log_{0.1}10$　　底 0.1 は 1 より小さいから　$x\geqq 10$　……(ⅱ)

(ⅰ)，(ⅱ)の共通な範囲を求めて　$\boldsymbol{x\geqq 10}$

③　$\log_x 3$ を変形すると　$\log_x 3=\dfrac{\log_3 3}{\log_3 x}=\dfrac{1}{\log_3 x}$　　よって，不等式は　$\dfrac{1}{\log_3 x}+2\log_3 x\geqq 3$

$\log_3 x=t$ とおくと　$\dfrac{1}{t}+2t\geqq 3$　　また，$x\neq 1$ から　$t\neq 0$

(ⅰ)　$t>0$ のとき

不等式の両辺に $t$ を掛けると　$1+2t^2\geqq 3t$　　整理すると　$(t-1)(2t-1)\geqq 0$

これと，$t>0$ から　$0<t\leqq\dfrac{1}{2}$，$1\leqq t$　　すなわち　$0<\log_3 x\leqq\dfrac{1}{2}$，$1\leqq\log_3 x$

変形すると，$\log_3 1<\log_3 x\leqq\log_3\sqrt{3}$，$\log_3 3\leqq\log_3 x$ であり，底 3 は 1 より大きいから

$1<x\leqq\sqrt{3}$，$3\leqq x$

(ⅱ)　$t<0$ のとき

不等式の両辺に $t$ を掛けると　$1+2t^2\leqq 3t$　　整理すると　$(t-1)(2t-1)\leqq 0$

これと，$t<0$ を同時に満たす $t$ は存在しない。

以上から　$\boldsymbol{1<x\leqq\sqrt{3}}$**，**$\boldsymbol{3\leqq x}$

**１２　対数関数の最大・最小**

(1)　関数 $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^3$ の最小値を求めよ。

(2)　関数 $y=\log_2(1-2x)+\log_2 x$ の最大値を求めよ。

**要　点**

(1)　$\log_2 x^3=3\log_2 x$ であるから，$\log_2 x=t$ とおき最小値を求める。

(2)　真数条件に注意して，対数の性質を利用して最大値を求める。

## 解答

(1)　$y=(\log_2 x)^2-3\log_2 x$ であるから，$\log_2 x=t$ とおくと　$y=t^2-3t=\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$

$t=\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{9}{4}$ をとる。$t=\dfrac{3}{2}$ のとき　$\log_2 x=\dfrac{3}{2}$　　よって　$x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

したがって，この関数は　**$x=2\sqrt{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{9}{4}$** をとる。

(2)　真数は正であるから　$1-2x>0$ かつ $x>0$　　すなわち　$0<x<\dfrac{1}{2}$　……(ⅰ)

関数を変形すると　$y=\log_2(1-2x)x=\log_2(x-2x^2)=\log_2\left\{-2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}\right\}$

$z=-2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}$ とおくと，(ⅰ)において $z$ は $x=\dfrac{1}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{8}$ をとる。

底 2 は 1 より大きいから，$y$ も **$x=\dfrac{1}{4}$ のとき最大値** $\log_2\dfrac{1}{8}=\mathbf{-3}$ をとる。

**１３　常用対数の利用**

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$15^{15}$ は何桁の整数か。

(2)　$0.75^{100}$ は小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

**要　点**

10 を底とする対数を **常用対数** という。正の数 $N$ の常用対数は $\log_{10}N$ である。

**自然数の桁数**

例えば，$100\leqq N<1000$ なら $N$ は 3 桁の整数である。一般に次の関係がある。

$N$ が $k$ 桁の自然数 $\Leftrightarrow$ $10^{k-1}\leqq N<10^k$ $\Leftrightarrow$ $k-1\leqq\log_{10}N<k$

**小数首位**

$N$ は小数第 $k$ 位に初めて 0 でない数字が現れる $\Leftrightarrow$ $10^{-k}\leqq N<10^{-k+1}$ $\Leftrightarrow$ $-k\leqq\log_{10}N<-k+1$

## 解答

(1)　$15^{15}$ の常用対数の値を求める。

$$\log_{10}15^{15}=15\log_{10}15=15(\log_{10}3+\log_{10}5)=15\left(\log_{10}3+\log_{10}\frac{10}{2}\right)=15(0.4771+1-0.3010)=17.6415$$

よって　$15^{15}=10^{17.6415}$　　$10^{17}<10^{17.6415}<10^{18}$ であるから　　$10^{17}<15^{15}<10^{18}$

したがって，$15^{15}$ は **18 桁**の整数である。

(2)　$\log_{10}0.75^{100}=100\log_{10}\frac{3}{4}=100(\log_{10}3-\log_{10}4)=100(\log_{10}3-2\log_{10}2)=100(0.4771-2\cdot0.3010)=-12.49$

よって　$0.75^{100}=10^{-12.49}$　　$10^{-13}<10^{-12.49}<10^{-12}$ であるから　　$10^{-13}<0.75^{100}<10^{-12}$

したがって，$0.75^{100}$ は**小数第 13 位に初めて 0 でない数字が現れる。**

研究　**最高位の数，一の位の数**

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とし，$N=12^{30}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$N$ は何桁の整数か。　　(2)　$N$ の最高位の数を求めよ。　　(3)　$N$ の一の位の数を求めよ。

**要　点**

(2)　$k$ 桁の整数である $N$ の最高位の数を $a$ とすると，次の関係が成り立つ。

$$a\cdot10^{k-1}\leqq N<(a+1)\cdot10^{k-1} \iff k-1+\log_{10}a\leqq\log_{10}N<k-1+\log_{10}(a+1)$$

$\log_{10}N$ の整数部分を $p$，小数部分を $q$ とすると　　$p=k-1$，　$\log_{10}a\leqq q<\log_{10}(a+1)$

(3)　一の位の数の規則性を考える。

## 解答

(1)　$\log_{10}12^{30}=30\log_{10}12=30(2\log_{10}2+\log_{10}3)=30(2\cdot0.3010+0.4771)=32.373$

よって　$12^{30}=10^{32.373}$　　$10^{32}<10^{32.373}<10^{33}$ であるから　　$10^{32}<12^{30}<10^{33}$

したがって，$12^{30}$ は **33 桁**の整数である。

(2)　(1)から　$\log_{10}12^{30}=32.373=32+0.373$　　ここで，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ であるから

$$\log_{10}2<0.373<\log_{10}3 \qquad \text{よって}\quad 2<10^{0.373}<3$$

各辺に $10^{32}$ を掛けると　$2\cdot10^{32}<10^{32.373}<3\cdot10^{32}$　　すなわち　$2\cdot10^{32}<12^{30}<3\cdot10^{32}$

したがって，$12^{30}$ の最高位の数は　**2**

(3)　12 を $n$ 乗したときの一の位の数を $a_n$ とする。

$12^1=12$ より　$a_1=2$，　$12^2=144$ より　$a_2=4$，　$12^3=1728$ より　$a_3=8$，……

$a_{n+1}$ は $a_n$ に 2 を掛けた数の一の位の数である。よって，$a_4=6$，$a_5=2$，$a_6=4$，……　であり，

$a_n$ は　2，4，8，6，2，4，8，6，2，4，……　となり，4 つの数 2，4，8，6 を順に繰り返す。

30 は 4 で割ると 2 余るから　$a_{30}=4$　　したがって，$12^{30}$ の一の位の数は　**4**