式と証明

1　3 次式の展開，因数分解

(1)　次の式を展開せよ。

①　$(x+2)(x^2-2x+4)$　　②　$(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$

③　$(x-1)^3$　　④　$(2x+3y)^3$

(2)　次の式を因数分解せよ。

①　x^3-8　　②　$27x^3+1$　　③　a^6-b^6

要　点

次の公式を利用する。因数分解の場合は，右辺から左辺への変形を用いる。

・$\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}$　　$\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$

・$\boldsymbol{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$　　$\boldsymbol{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

解答

(1)　①　$(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)=x^3+2^3=\boldsymbol{x^3+8}$

②　$(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)=(3a)^3-b^3=\boldsymbol{27a^3-b^3}$

③　$(x-1)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2-1^3=\boldsymbol{x^3-3x^2+3x-1}$

④　$(2x+3y)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 3y+3\cdot 2x\cdot(3y)^2+(3y)^3$

$=\boldsymbol{8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3}$

(2)　①　$x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2)=\boldsymbol{(x-2)(x^2+2x+4)}$

②　$27x^3+1=(3x)^3+1^3=\boldsymbol{(3x+1)(9x^2-3x+1)}$

③　$a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

別解　$a^6-b^6=(a^2)^3-(b^2)^3=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)=(a+b)(a-b)\{(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2\}$

$=(a+b)(a-b)\{(a^2+b^2)^2-(ab)^2\}=(a+b)(a-b)(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

2　パスカルの三角形，二項定理

(1)　①　$(a+b)^4$ を，パスカルの三角形を利用して展開せよ。

②　$(a+b)^4$ を，二項定理を利用して展開せよ。

(2)　$(x-2y)^5$ における x^3y^2 の係数を求めよ。

(3)　$(a+b+c)^6$ の展開式における ab^4c の係数を求めよ。

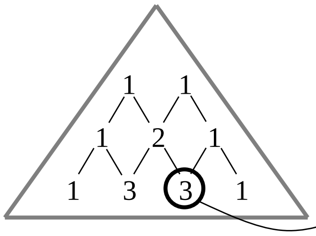
要　点

パスカルの三角形

$a+b=$　　　$1a \;+\; 1b$

$(a+b)^2=$　　　$1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3=$　　　$1a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$



・両端は 1

・両端以外は

　左上＋右上

(左上の 2)＋(右上の 1)

$(a+b)^n$ の展開式における一般項

$(a+b)^n$ の展開式の各項は $\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r}$ と表すことができる。

$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ の係数

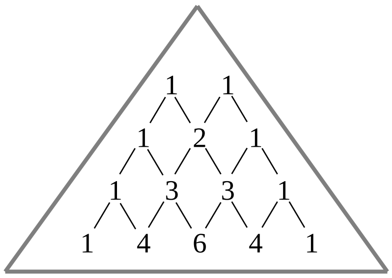
$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ の係数は $\boldsymbol{\dfrac{n!}{p!q!r!}}$　　ただし　$p+q+r=n$

解答

(1)　①　右の三角形より

$(a+b)^4=1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$

$=\boldsymbol{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}$



②　$(a+b)^4={}_4\mathrm{C}_0a^4b^0+{}_4\mathrm{C}_1a^3b^1+{}_4\mathrm{C}_2a^2b^2+{}_4\mathrm{C}_3a^1b^3+{}_4\mathrm{C}_4a^0b^4$

$=\boldsymbol{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}$

(2)　$(x-2y)^5$ の展開式の一般項は　${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}(-2y)^r={}_5\mathrm{C}_r(-2)^r x^{5-r}y^r$

$x^{5-r}y^r$ が x^3y^2 となるのは　$r=2$　　よって，求める係数は　${}_5\mathrm{C}_2\cdot(-2)^2=10\cdot4=\mathbf{40}$

(3)　$ab^4c=a^1b^4c^1$ より，求める係数は　$\dfrac{6!}{1!4!1!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1}=\mathbf{30}$

$\boxed{3}$　**整式の除法**

(1)　整式 $A=2x^3+3x^2+1$ を整式 $B=x^2+2x+2$ で割った商と余りを求めよ。

(2)　整式 $A=2x^3+3x^2+1$ を整式 B で割ると，商が $2x^2+5x+5$，余りが 6 であった。整式 B を求めよ。

要　点

整式 A と 0 でない整式 B に対して，次の等式を満たす整式 Q と R が 1 通りに定まる。

$\boldsymbol{A=BQ+R}$　　ただし，R は 0 か，B より次数の低い整式

この等式において，整式 $\boldsymbol{Q}$ を，A を B で割った **商**，

$\boldsymbol{R}$ を　　　　　　　**余り**

という。特に $R=0$ のとき，A は B で **割り切れる** という。

整式 A を整式 B で割るとき

$\boxed{1}$　A，B を降べきの順に整理してから，割り算を行う。

$\boxed{2}$　余りの次数が B の次数より低くなるまで計算を続ける。

解答

(1)

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & 2x-1 \\ \cline{2-2}
x^2+2x+2 &)\,2x^3+3x^2+1 \\
 & \underline{2x^3+4x^2+4x} \\
 & -x^2-4x+1 \\
 & \underline{-x^2-2x-2} \\
 & -2x+3
\end{array}$$

ない次数の項の場所は空けておく。

よって，**商は $2x-1$，余りは $-2x+3$**

(2) $2x^3+3x^2+1=B(2x^2+5x+5)+6$

これから

$B(2x^2+5x+5)=2x^3+3x^2+1-6$

$\qquad=2x^3+3x^2-5$

よって　$\boldsymbol{B=x-1}$

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x-1 \\ \cline{2-2}
2x^2+5x+5 &)\,2x^3+3x^2-5 \\
 & \underline{2x^3+5x^2+5x} \\
 & -2x^2-5x-5 \\
 & \underline{-2x^2-5x-5} \\
 & 0
\end{array}$$

4　分数式とその計算

(1)　次の分数式を既約分数式にせよ。

①　$\dfrac{8xy^3}{6x^2y}$　　②　$\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

(2)　次の計算をせよ。

①　$\dfrac{3x+6}{x^2+x+1}\times\dfrac{x^3-1}{2x^2+3x-2}$　　②　$\dfrac{2x^2+3x-9}{x^2+x}\div\dfrac{2x^2+x-6}{x^3-x}$

(3)　次の計算をせよ。

①　$\dfrac{x^2-6}{x+3}+\dfrac{x}{x+3}$　　②　$\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{2}{4x^2-1}$

(4)　次の式を簡単にせよ。

①　$\dfrac{\frac{x}{2}-1}{1-\frac{2}{x}}$　　②　$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+x}}}$

要　点

分数式と約分

分数式の分母と分子をその共通因数で割ることを **約分する** という。　$\dfrac{\boldsymbol{A\times C}}{\boldsymbol{B\times C}}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$

分母と分子が共通因数をもたない分数式を **既約分数式** という。

分数式の乗法・除法

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}\times\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{D}}=\frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{BD}},\qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}\div\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{D}}=\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}\times\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{C}}=\frac{\boldsymbol{AD}}{\boldsymbol{BC}}$$

分数式の加法・減法

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{C}}+\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}=\frac{\boldsymbol{A+B}}{\boldsymbol{C}},\qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{C}}-\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}=\frac{\boldsymbol{A-B}}{\boldsymbol{C}}$$

分母が異なる分数式の加法，減法は，分母，分子に適当な整式を掛けて，分母を同じ分数式にしてから計算する。このように，分母をそろえることを **通分する** という。

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}+\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{D}}=\frac{\boldsymbol{AD+BC}}{\boldsymbol{BD}}$$

繁分数式

A または B が分数式のとき，$\dfrac{A}{B}$ の形の式を **繁分数式** という。

繁分数式は，次のようにして簡単にすることができる。

・$\dfrac{A}{B}=A\div B$ として計算する。

・$\dfrac{A}{B}=\dfrac{AC}{BC}$ として計算する。

解答

(1)　①　$\dfrac{8xy^3}{6x^2y}=\dfrac{4y^2\times 2xy}{3x\times 2xy}=\boldsymbol{\dfrac{4y^2}{3x}}$

　　②　$\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\boldsymbol{\dfrac{x+1}{x+2}}$

(2)　①　$\dfrac{3x+6}{x^2+x+1}\times\dfrac{x^3-1}{2x^2+3x-2}=\dfrac{3(x+2)\times(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)\times(x+2)(2x-1)}=\boldsymbol{\dfrac{3(x-1)}{2x-1}}$

　　②　$\dfrac{2x^2+3x-9}{x^2+x}\div\dfrac{2x^2+x-6}{x^3-x}=\dfrac{(x+3)(2x-3)}{x(x+1)}\times\dfrac{x(x+1)(x-1)}{(x+2)(2x-3)}=\boldsymbol{\dfrac{(x+3)(x-1)}{x+2}}$

(3)　①　$\dfrac{x^2-6}{x+3}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{x^2+x-6}{x+3}=\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+3}=\boldsymbol{x-2}$

　　②　$\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{2}{4x^2-1}=\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{2}{(2x+1)(2x-1)}=\dfrac{(2x+1)-2}{(2x+1)(2x-1)}=\dfrac{2x-1}{(2x+1)(2x-1)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2x+1}}$

(4) ① $$\frac{\frac{x}{2}-1}{1-\frac{2}{x}}=\left(\frac{x}{2}-1\right)\div\left(1-\frac{2}{x}\right)=\frac{x-2}{2}\div\frac{x-2}{x}=\frac{x-2}{2}\times\frac{x}{x-2}=\boldsymbol{\frac{x}{2}}$$

② $$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1+x}}}=\frac{\left(1-\frac{1}{1+x}\right)}{\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{1+x}}\right)\times\left(1-\frac{1}{1+x}\right)}=\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\left(1-\frac{1}{1+x}\right)-1}=\frac{\frac{(1+x)-1}{1+x}}{-\frac{1}{1+x}}=\frac{x}{-1}=\boldsymbol{-x}$$

別解 $$\frac{1}{1-\frac{1}{\boxed{1-\frac{1}{1+x}}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\boxed{\frac{1+x-1}{1+x}}}}=\frac{1}{1-\boxed{\frac{1}{\frac{x}{1+x}}}}=\frac{1}{1-\boxed{\frac{1+x}{x}}}=\frac{1}{\frac{x-(1+x)}{x}}=\frac{1}{-\frac{1}{x}}=-x$$

5 恒等式

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1) $2x^2+bx+c=ax^2+7x+6$

(2) $ax^2+bx(x-1)+c(x-1)(x+1)=x^2+2x+3$

(3) $$\frac{2}{x(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}$$

要　点

恒等式

文字にどのような値を代入してもつねに成り立つ等式を，その文字についての **恒等式** という。

〈注意〉文字に特定の値を代入したときのみ成り立つ，言い換えれば，文字にある値を代入したとき成り立たない等式は **方程式** という。

恒等式の性質

A，B が x についての整式であるとき

- **$A=0$ が恒等式 $\Leftrightarrow$ A の各項の係数はすべて 0**
- **$A=B$ が恒等式 $\Leftrightarrow$ A と B の次数は等しく，両辺の同じ次数の項の係数はそれぞれ等しい**

分数式を含む場合は，分母を 0 とする x の値を除いたすべての x について成り立つ等式ならば，その等式は x についての恒等式である。

また，**分数式を含む等式が恒等式ならば，分母をはらった等式も恒等式である。**分母をはらった等式は，分数式を含む等式において分母を 0 とする x の値でも成り立つことに注意する。

解答

(1)　両辺の同じ次数の項の係数を比較して　$\boldsymbol{a=2,\ b=7,\ c=6}$

(2)　左辺を展開して整理すると

$$ax^2+bx(x-1)+c(x-1)(x+1)=ax^2+b(x^2-x)+c(x^2-1)=(a+b+c)x^2-bx-c$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ -b=2 \\ -c=3 \end{cases}$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=6,\ b=-2,\ c=-3}$

恒等式の未知の係数を決定するとき，両辺の同じ次数の項の係数を比較する方法を **係数比較法** という。

別解　与えられた等式が恒等式なら，x にどんな値を代入しても成り立つから，a，b，c が求めやすい x の値を代入してみる。

$x=0$ を代入すると　$c\cdot(-1)=3$　　よって　$c=-3$

$x=1$ を代入すると　$a=1+2+3$　　よって　$a=6$

$x=-1$ を代入すると　$a+2b=1-2+3$,　　これと $a=6$ から　$b=-2$

$a=6$，$b=-2$，$c=-3$ のとき，等式が恒等式になることを確かめる。

$$(\text{左辺})=6x^2-2x(x-1)-3(x-1)(x+1)=6x^2-2x^2+2x-3x^2+3=x^2+2x+3=(\text{右辺})$$

したがって，与えられた等式は恒等式である。

恒等式の未知の係数を決定するとき，適当な値を代入する方法を **数値代入法** という。

〈注意〉A，B が x についての n 次以下の整式であるとき，等式 $A=B$ が $n+1$ 個の異なる x の値に対して成り立つならば，この等式は x についての恒等式となることが知られている。しかし，このことは高校数学では未習の内容であるため，数値代入法で係数を求めた場合は，実際に恒等式になることを確かめるようにする。

(3)　両辺に $x(x+1)(x+2)$を掛けて得られる等式

$$2=a(x+1)(x+2)+bx(x+2)+cx(x+1)$$

も恒等式である。

右辺を展開して整理すると

$$\begin{aligned} a(x+1)(x+2)+bx(x+2)+cx(x+1)&=a(x^2+3x+2)+b(x^2+2x)+c(x^2+x) \\ &=(a+b+c)x^2+(3a+2b+c)x+2a \end{aligned}$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$\begin{cases} 0=a+b+c \\ 0=3a+2b+c \\ 2=2a \end{cases}$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=-2,\ c=1}$

別解　$2=a(x+1)(x+2)+bx(x+2)+cx(x+1)$ の両辺は 2 次以下の整式であるので，3 個の x の値，例えば $x=0$，$x=-1$，$x=-2$ を代入して a，b，c の値を求めてもよい。

$\boxed{6}$ **等式の証明**

(1)　等式 $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=\dfrac{1}{2}\{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\}$ を証明せよ。

(2)　①　$a+b+c=0$ のとき，等式 $a^3+b^3+c^3=3abc$ が成り立つことを証明せよ。

　②　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，等式 $\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{a-b}{c-d}$ が成り立つことを証明せよ。

要　点

(1)　等式 $A=B$ を証明するには，次の 3 つの方法がよく用いられる。

- **A を変形して B を導く。または，B を変形して A を導く。**
- **A と B をそれぞれ変形して，同じ式を導く。**
- **$A-B=0$ であることを示す。**

(2)　②　条件が比例式で与えられた場合，その値を k とおく。

本問では $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおき，$a=bk$，$c=dk$ とする。

証明

(1)　(右辺) $=\dfrac{1}{2}\{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\}=\dfrac{1}{2}(x^2+2xy+y^2+y^2+2yz+z^2+z^2+2zx+x^2)$

$=\dfrac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2yz+2zx)=x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=$ (左辺)

(2)　①　$a+b+c=0$ より，$c=-a-b$ であるから

(左辺) $=a^3+b^3+(-a-b)^3=a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=-3a^2b-3ab^2$

(右辺) $=3ab(-a-b)=-3a^2b-3ab^2$

したがって　$a^3+b^3+c^3=3abc$

$\boxed{\text{別解}}$　$a^3+b^3+c^3-3abc=0$ を示すことを考える。

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ であることを利用して，$a^3+b^3+c^3-3abc$ を変形すると

$$
\begin{aligned}
a^3+b^3+c^3-3abc &= \{(a+b)^3-3ab(a+b)\}+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc \\
&= \{(a+b+c)^3-3(a+b)\cdot c(a+b+c)\}-3ab(a+b)-3abc \\
&= (a+b+c)^3-3c(a+b)(a+b+c)-3ab(a+b+c) \\
&= (a+b+c)^3-3(a+b+c)(ca+cb+ab) \\
&= (a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\} \\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)
\end{aligned}
$$

よって，$a+b+c=0$ のとき　$a^3+b^3+c^3-3abc=0$

したがって　$a^3+b^3+c^3=3abc$

② $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

よって　$(\text{左辺})=\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{bk+b}{dk+d}=\dfrac{b(k+1)}{d(k+1)}=\dfrac{b}{d}$

$(\text{右辺})=\dfrac{a-b}{c-d}=\dfrac{bk-b}{dk-d}=\dfrac{b(k-1)}{d(k-1)}=\dfrac{b}{d}$

したがって　$\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{a-b}{c-d}$

> $c+d\neq 0$ から　$\dfrac{c}{d}\neq -1$
>
> よって，$k\neq -1$ から　$k+1\neq 0$
>
> $c-d\neq 0$ から，同様に　$k-1\neq 0$

7　**不等式の証明**

(1)　$a>b$，$a>c$ のとき，不等式 $a^2+bc>a(b+c)$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　不等式 $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\geqq 0$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

要　点

(1)　条件を利用して，(左辺)−(右辺)>0 であることを証明する。

(2)　実数 $x, y, \cdots\cdots$ に対して　$x^2+y^2+\cdots\cdots\geqq 0$　　等号が成り立つのは, $x=y=\cdots\cdots=0$ のときである。

証明

(1)　$a^2+bc-a(b+c)=a^2+bc-ab-ac=a(a-c)-b(a-c)$

$=(a-b)(a-c)$

$a>b$，$a>c$ から　$a-b>0$，$a-c>0$

よって　$(a-b)(a-c)>0$　　したがって　$a^2+bc>a(b+c)$

> $a^2+bc-ab-ac$ の因数分解は, 次数の低い b で整理することを考える。

(2)　$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$

$=\dfrac{1}{2}\{(a^2+2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)+(c^2+2ca+a^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

$(a+b)^2\geqq 0$，$(b+c)^2\geqq 0$，$(c+a)^2\geqq 0$ であるから　$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\geqq 0$

等号が成り立つのは，$a+b=0$ かつ $b+c=0$ かつ $c+a=0$　　すなわち，$a=b=c=0$ のときである。

8　**相加平均と相乗平均の大小関係**

(1)　$x>0$ のとき，不等式 $4x+\dfrac{1}{x}\geqq 4$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(2)　$x>0$，$y>0$ のとき，$\left(3x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{12}{x}\right)$ の最小値を求めよ。また，そのときの x，y が満たす条件を求めよ。

要　点

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき

$$\boldsymbol{\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}}$$

等号が成り立つのは，$a=b$ のときである。

$\boxed{\text{証明}}$　$a>0$，$b>0$ であるから

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}\}=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$ であるから　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

等号が成り立つのは　$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$，　すなわち，$a=b$ のときである。

〈注意〉相加平均と相乗平均の大小関係は，　$\boldsymbol{a+b \geqq 2\sqrt{ab}}$　の形で用いられることもある。

解答

(1)　$4x>0$，$\dfrac{1}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$4x+\frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}}=2 \cdot 2=4$$

よって　$4x+\dfrac{1}{x} \geqq 4$

等号が成り立つのは　$4x=\dfrac{1}{x}$　　すなわち，$x^2=\dfrac{1}{4}$ のときであるが，$x>0$ より，$x=\dfrac{1}{2}$ のときである。

(2)　$\left(3x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{12}{x}\right)=3xy+36+1+\dfrac{12}{xy}=3xy+\dfrac{12}{xy}+37$

$x>0$，$y>0$ より，$3xy>0$，$\dfrac{12}{xy}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$3xy+\frac{12}{xy} \geqq 2\sqrt{3xy \cdot \frac{12}{xy}}=2 \cdot 6=12$$

よって　$\left(3x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{12}{x}\right) \geqq 12+37=49$

等号が成り立つのは　$3xy=\dfrac{12}{xy}$　　すなわち，$(xy)^2=4$ のときであるが，$x>0$，$y>0$ より，$xy=2$ のときである。したがって，**$xy=2$ のとき，$\left(3x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{12}{x}\right)$ の最小値は 49**

$\boxed{9}$ **やや複雑な不等式の証明**

(1)　$x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{x+y}$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　不等式 $|x|+|y|\geqq|x+y|$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

要　点

$\boldsymbol{a>0,\ b>0}$ **のとき**　　$\boldsymbol{a^2>b^2 \Leftrightarrow a>b}$

$\boldsymbol{a^2\geqq b^2 \Leftrightarrow a\geqq b}$

$\boxed{\boldsymbol{a>0,\ b>0}\ \textbf{のとき}\quad \boldsymbol{a^2>b^2 \Leftrightarrow a>b}\ \textbf{の証明}}$

$(\Leftarrow)$

$a>0$，$b>0$，$a>b$ のとき

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)>0$

よって　$a^2>b^2$

$(\Rightarrow)$

$a>0$，$b>0$，$a^2>b^2$ のとき，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)>0$ であり，$a+b>0$ より $a-b>0$ である。

よって　$a>b$

〈注意〉$\boldsymbol{a\geqq0,\ b\geqq0}$ **のとき**　　$\boldsymbol{a^2>b^2 \Leftrightarrow a>b}$

$\boldsymbol{a^2\geqq b^2 \Leftrightarrow a\geqq b}$

も成り立つ。

(2)　$|a|\geqq a$，$|a|\geqq -a$，$|a|^2=a^2$ であることを利用する。

証明

(1)　(左辺)$^2-$(右辺)$^2=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{x+y})^2=x+2\sqrt{xy}+y-(x+y)=2\sqrt{xy}$

$x>0$，$y>0$ より　$2\sqrt{xy}>0$

よって　$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2>(\sqrt{x+y})^2$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$，$\sqrt{x+y}>0$ であるから　$\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{x+y}$

(2)　(左辺)$^2-$(右辺)$^2=(|x|+|y|)^2-|x+y|^2=(|x|^2+2|x||y|+|y|^2)-(x+y)^2$

$=(x^2+2|xy|+y^2)-(x^2+2xy+y^2)=2(|xy|-xy)$

$|xy|\geqq xy$ であるから　$2(|xy|-xy)\geqq0$

よって　$(|x|+|y|)^2\geqq|x+y|^2$

$|x|+|y|\geqq0$，$|x+y|\geqq0$ であるから　$|x|+|y|\geqq|x+y|$

等号が成り立つのは　$|xy|=xy$　　すなわち，$xy\geqq0$ のときである。