式と曲線

1　放物線

次の問いに答えよ。

(1)　焦点が点(3，0)，準線が直線 $x=-3$ である放物線の方程式を求めよ。また，その概形をかけ。

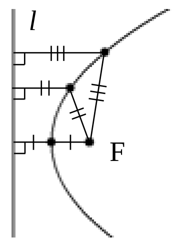
(2)　放物線 $y^2=-6x$ の焦点，準線および頂点を求め，その概形をかけ。

(3)　焦点が点(0，−1)，準線が直線 $y=1$ である放物線の方程式を求めよ。また，その概形をかけ。

(4)　放物線 $x^2=8y$ の焦点，準線および頂点を求め，その概形をかけ。

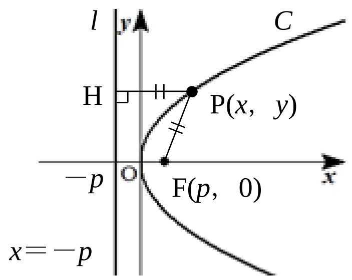
要　点

放物線



平面上において，定点 F と F を通らない定直線 l について，
点 F からの距離と直線 l からの距離とが等しい点の軌跡を
放物線 という。
定点 F をその放物線の **焦点** ，定直線 l をその放物線の **準線**
という。

放物線の方程式

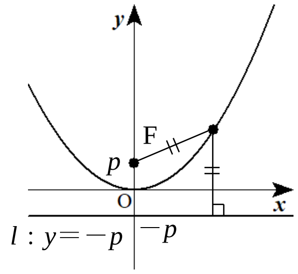


$p\neq0$ のとき，点 F(p，0)を焦点とし，直線 l : $x=-p$
を準線とする放物線を C とする。
放物線 C 上の点を P(x，y)とし，点 P から直線 l に垂線 PH を
引くと，　PF＝PH から　$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x-(-p)|$
両辺を 2 乗すると　$(x-p)^2+y^2=x^2+2px+p^2$
整理すると　$\boldsymbol{y^2=4px}$　……①

①を，**放物線の方程式の標準形** という。点 P(x，y)が放物線①上にあるとき，点 P′(x，$-y$)も①上にある。したがって，放物線①は x 軸に関して対称である。一般に，放物線の焦点を通り準線に垂直な直線を放物線の **軸** といい，放物線は軸に関して対称である。また，軸と放物線の交点を，放物線の **頂点** という。
以上から，$p\neq0$ のとき，放物線 $y^2=4px$ は次のようにまとめられる。

・焦点は(p，0)，準線は $x=-p$，頂点は原点(0，0)　　・軸は x 軸であり，放物線は x 軸に関して対称

軸が y 軸である放物線の方程式



放物線の方程式の標準形である $y^2=4px$　($p\neq0$)　の x と y を
入れかえた $\boldsymbol{x^2=4py}$ は，点 F(0，p)を焦点とし，直線 l : $y=-p$
を準線とする放物線の方程式となる。

〈注意〉放物線$x^2=4py$は，$y=\dfrac{1}{4p}x^2$と変形でき，この形の放物線
は数学 I で学習している。

$p\neq0$ のとき，放物線 $x^2=4py$ は次のようにまとめられる。

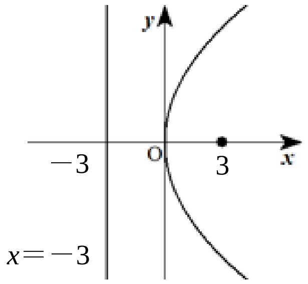
・焦点は(0，p)，準線は $y=-p$，頂点は原点(0，0)　　・軸は y 軸であり，放物線は y 軸に関して対称

解答

(1)　$y^2 = 4 \cdot 3x$

から　$\boldsymbol{y^2 = 12x}$

概形は，右の図のようになる。



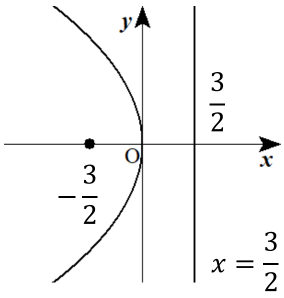
(2)　$y^2 = -6x$は，$y^2 = 4 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right)x$と変形できるから

焦点は点$\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$

準線は直線$x = \dfrac{3}{2}$

頂点は原点(0，0)

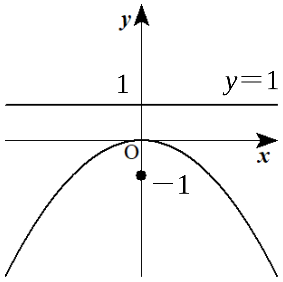
概形は，右の図のようになる。



(3)　$x^2 = 4 \cdot (-1) \cdot y$

から　$\boldsymbol{x^2 = -4y}$

概形は，右の図のようになる。



(4)　$x^2 = 8y$ は，$x^2 = 4 \cdot 2y$

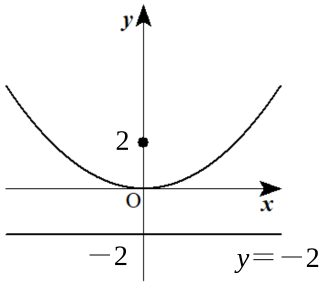
と変形できるから

焦点は点(0，2)

準線は直線 $y = -2$

頂点は原点(0，0)

概形は，右の図のようになる。



2　楕円

(1)　楕円$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ の頂点と焦点を求め，その概形をかけ。また，長軸と短軸の長さを求めよ。

(2)　焦点が点(2，0)，(−2，0)で，この 2 点からの距離の和が 6 である楕円の方程式を求めよ。

(3)　楕円$x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ の頂点と焦点を求め，その概形をかけ。

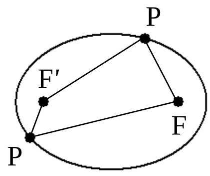
(4)　焦点が点(0，3)，(0，−3)で，この 2 点からの距離の和が 10 である楕円の方程式を求めよ。

(5)　円$x^2 + y^2 = 16$ を，x軸を基準としてy軸方向に$\dfrac{3}{4}$倍するとどのような曲線になるか。

要　点

楕円

平面上において，2 点 F，F′ からの距離の和が一定である点 P の軌跡を **楕円** といい，2 定点 F，F′ を楕円の **焦点** という。

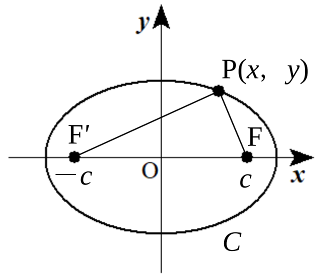


PF＋PF′ が一定

楕円の方程式

焦点 F(c，0)，F′(−c，0)からの距離の和が $2a$ である楕円を C とする。
ただし，$c>0$ とする。
楕円 C 上の点を P(x，y)とすると，

PF＋PF′ ＝$2a$

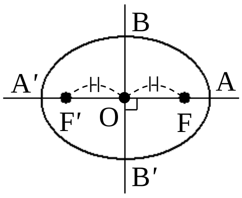


であるから　$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$
移項すると　$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$
両辺を 2 乗すると　$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\{(x+c)^2+y^2\}$
整理すると　$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$
さらに両辺を 2 乗すると　$a^2\{(x+c)^2+y^2\}=a^4+2a^2cx+c^2x^2$
展開すると　$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2$
整理すると　$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$
ここで，PF＋PF′ ＞FF′ から　$2a>2c$　　すなわち　$a>c$ であるから，$b>0$ として $a^2-c^2=b^2$ とおくと

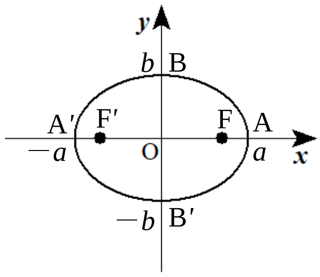
$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,\quad a>b>0 \qquad \text{両辺を}a^2b^2\text{で割ると}\quad \boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}\quad \cdots\cdots①$$

①を，**楕円の方程式の標準形** という。
$a^2-c^2=b^2$であり，$a>b>0$，$c>0$ であるから　$c=\sqrt{a^2-b^2}$
よって，焦点 F，F′ の座標は次のようになる。

$$\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right),\quad \mathrm{F'}\left(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$$



楕円の 2 つの焦点 F，F′ を結ぶ線分の中点を楕円の **中心** という。
直線 FF′ と楕円の交点を A，A′ とし，楕円の中心 O で直線 FF′ と垂直に交わる直線と楕円の交点を B，B′ とするとき，4 点 A，A′，B，B′ を楕円の **頂点** といい，線分 AA′ を **長軸** ，線分 BB′ を **短軸** という。
楕円①の中心は原点で，長軸は x 軸上にあり，短軸は y 軸上にある。
また，頂点は点 A(a，0)，A′(−a，0)，B(0，b)，B′(0，−b)である。
点(x，y)が楕円①上にあるとき，(x，−y)，(−x，y)，(−x，−y)も①上にある。したがって，楕円①は x 軸，y 軸，原点に関して対称である。



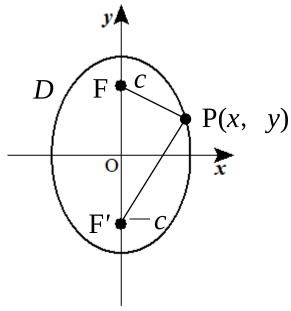
以上から，$a>b>0$ のとき，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は次のようにまとめられる。

- **頂点は点$(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$，$(0,\ b)$，$(0,\ -b)$**
- **焦点は点$\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$**
- **中心は原点，長軸の長さは $2a$，短軸の長さは $2b$**
- **x 軸，y 軸，原点に関して対称**
- **楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は $2a$**

焦点が y 軸上にある楕円の方程式

焦点 F(0，c)，F′ (0，$-c$)からの距離の和が $2b$ である楕円を D とする。
ただし，$c>0$ とする。楕円 D 上の点を P(x，y)とすると，

PF＋PF′ ＝$2b$



であるから $\sqrt{x^2+(y-c)^2}+\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2b$

焦点が x 軸上にある楕円と同様に変形すると

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2b-\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$

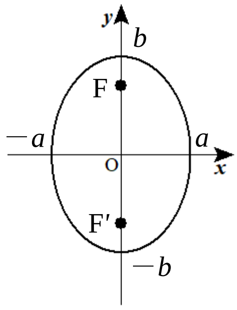
$$x^2+(y-c)^2=4b^2-4b\sqrt{x^2+(y+c)^2}+\{x^2+(y+c)^2\} \qquad b\sqrt{x^2+(y+c)^2}=b^2+cy$$

$$b^2\{x^2+(y+c)^2\}=b^4+2b^2cy+c^2y^2 \qquad b^2x^2+(b^2-c^2)y^2=b^2(b^2-c^2)$$

$b^2-c^2=a^2$とおくと，$b>a>0$ であり， $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ と変形できる。

以上から，$b>a>0$ のとき，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は次のようにまとめられる。

- **頂点は点$(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$，$(0,\ b)$，$(0,\ -b)$**
- **焦点は点$\left(0,\ \sqrt{b^2-a^2}\right)$，$\left(0,\ -\sqrt{b^2-a^2}\right)$**
- **中心は原点，長軸の長さは $2b$，短軸の長さは $2a$**
- **x 軸，y 軸，原点に関して対称**
- **楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は $2b$**



(5)　円を，x 軸を基準として y 軸方向に拡大，縮小する場合，円周上の点を Q(s，t)とおき，点 Q が移される点を P(x，y)とおいて，s，t の関係式から，x，y の関係式を導く。

解答

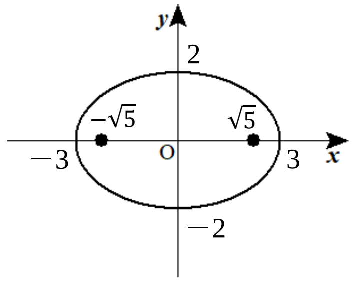
(1)　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ は $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ と変形できるから

頂点は点(3，0)，(−3，0)，(0，2)，(0，−2)

焦点は点$\left(\sqrt{3^2-2^2},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{3^2-2^2},\ 0\right)$

すなわち，**点$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$**

概形は右の図のようになる。



長軸の長さは 6，　短軸の長さは 4

(2)　焦点が x 軸上にあり，2 つの焦点を結ぶ線分の中点は原点であるから，求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>b>0$$

とおくことができる。

2 つの焦点までの距離の和が 6 であるから　$2a=6$　　よって　$a=3$

焦点は点 $\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$ であるから　$\sqrt{a^2-b^2}=2$

両辺を 2 乗して　$a^2-b^2=4$　　これに $a=3$ を代入すると　$9-b^2=4$　　したがって　$b^2=5$

以上から，求める楕円の方程式は　$\boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1}$

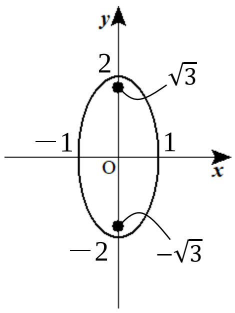
(3)　$x^2+\frac{y^2}{4}=1$ は $\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ と変形できるから

頂点は点(1，0)，(−1，0)，(0，2)，(0，−2)

焦点は点 $\left(0,\ \sqrt{2^2-1^2}\right)$，$\left(0,\ -\sqrt{2^2-1^2}\right)$

すなわち，**点 $\boldsymbol{(0,\ \sqrt{3})}$，$\boldsymbol{(0,\ -\sqrt{3})}$**

概形は右の図のようになる。



(4)　焦点が y 軸上にあり，2 つの焦点を結ぶ線分の中点は原点であるから，求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad b>a>0$$

とおくことができる。

2 つの焦点までの距離の和が 10 であるから　$2b=10$　　よって　$b=5$

焦点は点 $\left(0,\ \sqrt{b^2-a^2}\right)$，$\left(0,\ -\sqrt{b^2-a^2}\right)$ であるから　$\sqrt{b^2-a^2}=3$

両辺を 2 乗して　$b^2-a^2=9$　　これに $b=5$ を代入すると　$25-a^2=9$　　したがって　$a^2=16$

以上から，求める楕円の方程式は　$\boldsymbol{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1}$

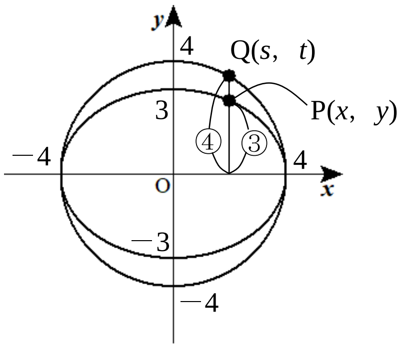
(5)　円周上の点を Q(s，t)，点 Q が移される点を P(x，y)とおくと

$$x=s,\quad y=\frac{3}{4}t$$

よって　$s=x,\quad t=\frac{4}{3}y$

$s^2+t^2=16$ であるから　$x^2+\left(\frac{4}{3}y\right)^2=16$

整理すると　$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$



したがって，求める曲線は　**楕円 $\boldsymbol{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1}$**

3　**双曲線**

(1)　双曲線$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$の頂点と焦点，漸近線を求め，その概形をかけ。

(2)　2 点(2，0)，(－2，0)を焦点とし，焦点からの距離の差が 2 である双曲線の方程式を求めよ。

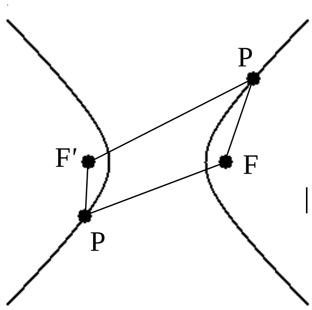
(3)　双曲線 $x^2-3y^2=-12$ の頂点と焦点，漸近線を求め，その概形をかけ。

(4)　2 点(0，3)，(0，－3)を焦点とし，漸近線が 2 直線 $y=\sqrt{2}x$，$y=-\sqrt{2}x$ である双曲線の方程式を求めよ。

要　点

双曲線

平面上において，2 点 F，F′ からの距離の差が一定である点 P の軌跡を **双曲線** といい，2 定点 F，F′ を双曲線の **焦点** という。

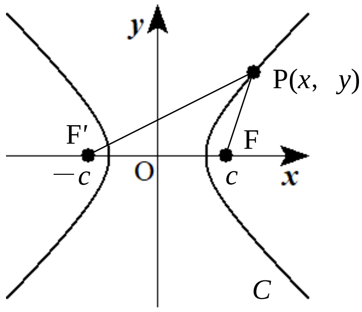


| PF－PF′ | が一定

双曲線の方程式

焦点 F(c，0)，F′ (－c，0)からの距離の差が $2a$ である双曲線を C とする。
ただし，$c>0$ とする。
双曲線 C 上の点を P(x，y)とすると，

| PF－PF′ |＝$2a$



すなわち　PF－PF′ ＝±$2a$

であるから　$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$

移項すると　$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

両辺を 2 乗すると　$(x-c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\{(x+c)^2+y^2\}$

整理すると　$\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$

さらに両辺を 2 乗すると　$a^2\{(x+c)^2+y^2\}=a^4+2a^2cx+c^2x^2$

展開すると　$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2$　$\cdots\cdots(*)$

ここで，PF＜PF′ ＋FF′ ，PF′ ＜PF＋FF′ であるから　| PF－PF′ | ＜FF′

| PF－PF′ |＝$2a$，FF′ ＝$2c$ より，$a<c$ であることに注意して(∗)を整理すると

$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$　　　$b>0$ として，$c^2-a^2=b^2$とおくと　$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

両辺をa^2b^2で割ると　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$　……①

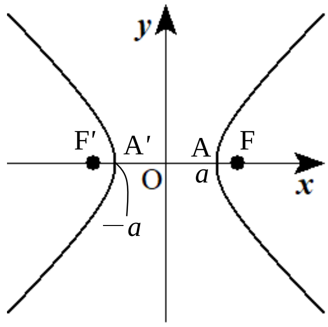
①を，**双曲線の方程式の標準形** という。

$c^2-a^2=b^2$であるから　$c=\sqrt{a^2+b^2}$

よって，焦点 F，F′ の座標は次のようになる。

F$\left(\sqrt{a^2+b^2}，0\right)$，F′$\left(-\sqrt{a^2+b^2}，0\right)$

双曲線の 2 つの焦点 F，F′ を結ぶ線分の中点を双曲線の **中心** といい，直線 FF′ を **主軸** という。
主軸と双曲線の交点を双曲線の **頂点** という。



双曲線①の中心は原点，頂点は点 A(a，0)，A′(−a，0)である。
点(x，y)が双曲線①上にあるとき，(x，−y)，(−x，y)，(−x，−y)も①上にある。したがって，双曲線①は x 軸，y 軸，原点に関して対称である。

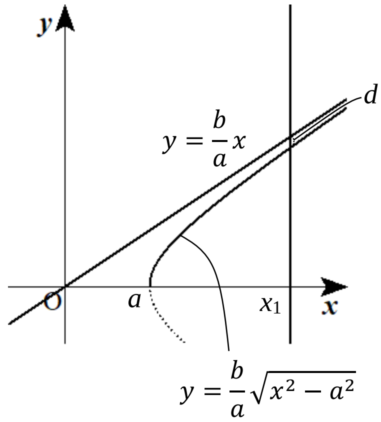
双曲線の漸近線

双曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　（ただし，$a>0$，$b>0$）　……①は

第 1 象限，すなわち $x>0$，$y>0$ の部分では

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1 \qquad y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)\text{より} \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

と表すことができる。



x座標を限りなく大きくすると，$\sqrt{x^2-a^2}$はxとほぼ同一視できると考えられるので，双曲線 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ は直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ に近づくと考えられる。実際，限りなく大きな値 x_1 において

$$d=\frac{b}{a}x_1-\frac{b}{a}\sqrt{{x_1}^2-a^2}=\frac{b}{a}\left(x_1-\sqrt{{x_1}^2-a^2}\right)=\frac{b}{a}\cdot\frac{{x_1}^2-({x_1}^2-a^2)}{x_1+\sqrt{{x_1}^2-a^2}}=\frac{ab}{x_1+\sqrt{{x_1}^2-a^2}}$$

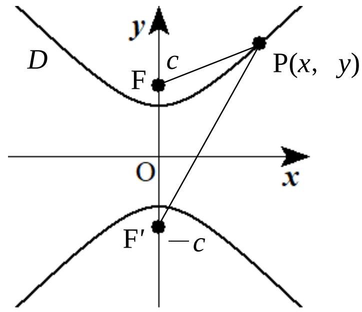
であるから，d は正であるが限りなく 0 に近づく。

双曲線①は，x軸，y軸に関して対称であるから，2 直線$y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$は双曲線①の漸近線である。

以上から，$a>0$，$b>0$ のとき，双曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は次のようにまとめられる。

- **頂点は点$(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$，中心は原点**
- **焦点は点$\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$**
- **x軸，y軸，原点に関して対称**
- **漸近線は2直線 $y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$**
- **双曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の差は $2a$**

焦点が y 軸上にある双曲線の方程式



焦点 F(0，c)，F′(0，−c)からの距離の差が $2b$ である双曲線を D とする。ただし，$c>0$ とする。
双曲線 D 上の点を P(x，y)とすると，

$$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=2b$$

であるから　$\sqrt{x^2+(y-c)^2}-\sqrt{x^2+(y+c)^2}=\pm 2b$

焦点が x 軸上にある双曲線と同様に変形すると

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=\pm 2b+\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$

$$x^2+(y-c)^2=4b^2\pm 4b\sqrt{x^2+(y+c)^2}+\{x^2+(y+c)^2\} \qquad \pm b\sqrt{x^2+(y+c)^2}=b^2+cy$$

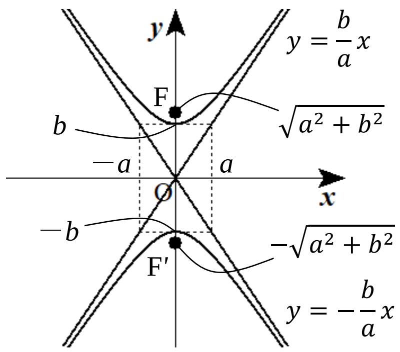
$$b^2\{x^2+(y+c)^2\}=b^4+2b^2cy+c^2y^2 \qquad b^2x^2+b^2y^2+2b^2cy+b^2c^2=b^4+2b^2cy+c^2y^2$$

$b<c$であるから　$b^2x^2-(c^2-b^2)y^2=-b^2(c^2-b^2)$

$a>0$ として，$c^2-b^2=a^2$とおいて，両辺をa^2b^2で割ると　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1}$

以上から，$a>0$，$b>0$ のとき，双曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$

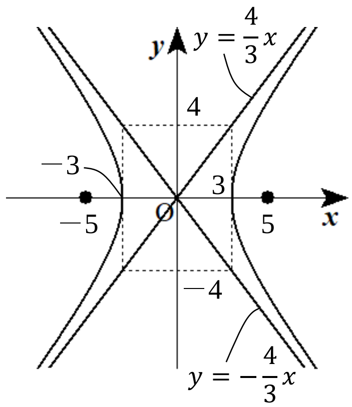
は次のようにまとめられる。



- **頂点は点$(0,\ b)$，$(0,\ -b)$，中心は原点**
- **焦点は点$\left(0,\ \sqrt{a^2+b^2}\right)$，$\left(0,\ -\sqrt{a^2+b^2}\right)$**
- **x 軸，y 軸，原点に関して対称**
- **漸近線は2直線 $y=\dfrac{b}{a}x$，　$y=-\dfrac{b}{a}x$**
- **双曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の差は 2b**

解答

(1)　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ は $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$ と変形できるから



頂点は点(3，0)，(−3，0)

焦点は点$\left(\sqrt{3^2+4^2},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{3^2+4^2},\ 0\right)$

すなわち，**点$(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$**

漸近線は 2直線 $y=\dfrac{4}{3}x$，　$y=-\dfrac{4}{3}x$

概形は右の図のようになる。

(2)　焦点が x 軸上にあり，2 つの焦点を結ぶ線分の中点は原点であるから，求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad a>0,\ b>0$$

とおくことができる。

2 つの焦点までの距離の差が 2 であるから　$2a=2$　　よって　$a=1$

焦点は点$\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$であるから　$\sqrt{a^2+b^2}=2$

両辺を 2 乗して　$a^2+b^2=4$　　これに $a=1$ を代入すると　$1+b^2=4$　　したがって　$b^2=3$

以上から，求める双曲線の方程式は　$\boldsymbol{x^2-\dfrac{y^2}{3}=1}$

(3)　$x^2-3y^2=-12$ は $\dfrac{x^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=-1$ と変形できるから

頂点は点(0，2)，(0，－2)

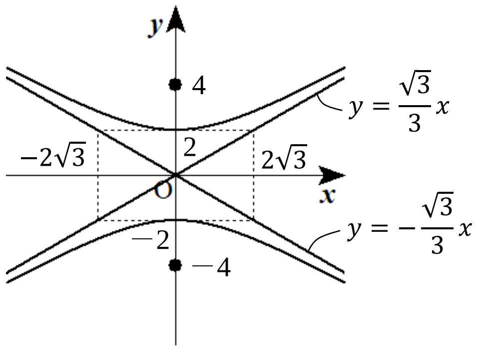
焦点は点$\left(0,\ \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}\right)$，$\left(0,\ -\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}\right)$

すなわち，**点$(\mathbf{0},\ \mathbf{4})$，$(\mathbf{0},\ -\mathbf{4})$**

漸近線は 2 直線 $y=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}x,\quad y=-\dfrac{2}{2\sqrt{3}}x$

すなわち，**2直線 $\boldsymbol{y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x,\quad y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x}$**

概形は右の図のようになる。



(4)　焦点が y 軸上にあり，2 つの焦点を結ぶ線分の中点は原点であるから，求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,\quad a>0,\ b>0$$

とおくことができる。

2 つの焦点が$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$であるから　$\sqrt{a^2+b^2}=3$　……①

漸近線が 2 直線 $y=\sqrt{2}x,\quad y=-\sqrt{2}x$であるから　$\dfrac{b}{a}=\sqrt{2}$　……②

②から $b=\sqrt{2}a$ であり，これを①に代入すると　$\sqrt{a^2+2a^2}=3$

整理して両辺を 2 乗すると　$3a^2=9$　　$a>0$ より　$a=\sqrt{3}$　　②から　$b=\sqrt{6}$

したがって，求める双曲線の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=-1}$

4　曲線の平行移動

次の問いに答えよ。

(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ を，x軸方向に 2，y軸方向に -1 だけ平行移動した楕円の方程式と焦点を求めよ。

(2)　次の方程式はどのような図形を表すか。

①　$y^2+8y-8x=0$　　　②　$4x^2-y^2+24x+4y+48=0$

要　点

曲線の方程式

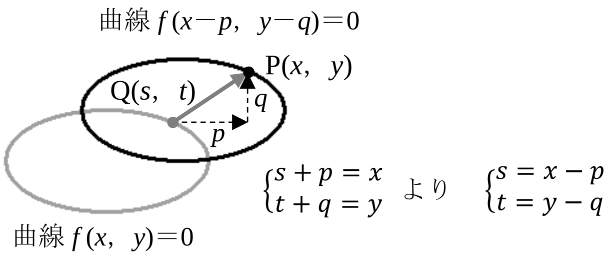
$y-4x^2+1$ のように x，y を含む式を記号 $\boldsymbol{f(x,\ y)}$ で表すとき，方程式 $f(x,\ y)=0$ がある曲線を表すならば，$\boldsymbol{f(x,\ y)=0}$ をこの **曲線の方程式** といい，この曲線を **方程式 $\boldsymbol{f(x,\ y)=0}$ の表す曲線**，または **曲線 $\boldsymbol{f(x,\ y)=0}$** という。

例えば，曲線 $y-4x^2+1=0$ は放物線であるから，放物線 $y-4x^2+1=0$，または放物線 $y=4x^2-1$ といってもよい。

曲線の平行移動

曲線 $f(x,\ y)=0$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して得られる曲線の方程式は

$$\boldsymbol{f(x-p,\ y-q)=0}$$



解答

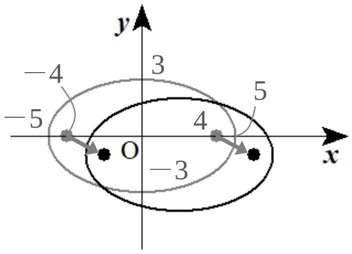
(1)　平行移動後の楕円の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1}$

もとの楕円の焦点は

点$(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$

であるから，移動後の楕円の焦点は

点$(6,\ -1)$，$(-2,\ -1)$



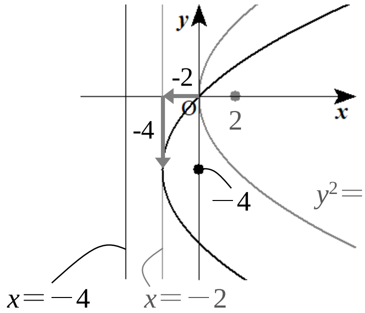
(2)　①　方程式を変形すると

$y^2+8y+16=8x+16$

$(y+4)^2=8(x+2)$

したがって，与えられた方程式は

放物線 $y^2=8x$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に -4 だけ平行移動した放物線 を表す。



②　方程式を変形すると

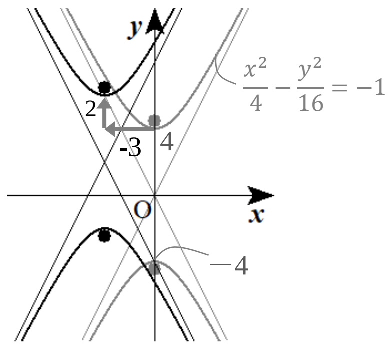
$4(x^2+6x+9)-36-(y^2-4y+4)+4+48=0$

$4(x+3)^2-(y-2)^2=-16$

$$\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{16}=-1$$

したがって，与えられた方程式は

双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=-1$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線 を表す。



$\boxed{5}$　**2 次曲線と直線**

(1)　k を定数とする。次の曲線と直線の共有点の個数を調べよ。

①　$y^2=4x,\quad y=x+k$　　　　②　$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1,\quad y=kx$

(2)　点$(0,\ -2)$から楕円$x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ に引いた接線の方程式を求めよ。

要　点

2 次曲線

x，y の 2 次方程式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

（a，b，c，d，e，f は定数，a，b，c のいずれかは 0 ではない。）

で表される曲線を **2 次曲線** という。放物線，楕円，双曲線は 2 次曲線である。

2 次曲線と直線の共有点

2 次曲線と直線の共有点の座標は，それらの方程式を連立させた連立方程式の実数解として得られる。また，この連立方程式から 1 文字消去して得られる方程式が 2 次方程式のときは，その判別式 D によって共有点の個数を判別できる。

2 次曲線の接線

2 次曲線と直線の方程式を連立させて 1 文字消去した結果が 2 次方程式でその判別式が 0，すなわち重解をもつとき，直線は 2 次曲線に **接する** といい，この直線を 2 次曲線の **接線**，共有点を **接点** という。

解答

(1)　①　$y=x+k$ を $y^2=4x$ に代入すると

$(x+k)^2=4x$　　$x^2+2kx+k^2=4x$　　$x^2+2(k-2)x+k^2=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

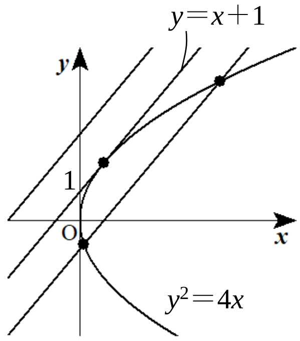
$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-1\cdot k^2=k^2-4k+4-k^2=-4k+4$$

よって，求める共有点の個数は

$D>0$　すなわち　**$k<1$ のとき　2 個**

$D=0$　すなわち　**$k=1$ のとき　1 個**

$D<0$　すなわち　**$k>1$ のとき　0 個**



②　$y=kx$ を $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ に代入すると　$\dfrac{x^2}{4}-(kx)^2=1$

$x^2-4k^2x^2=4$　　$(1-4k^2)x^2-4=0$　……(＊)

(ⅰ)　$1-4k^2=0$　　すなわち，$k=\pm\dfrac{1}{2}$ のとき

方程式(＊)は実数解をもたない。

(ⅱ)　$1-4k^2>0$　　すなわち，$-\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{1}{2}$ のとき

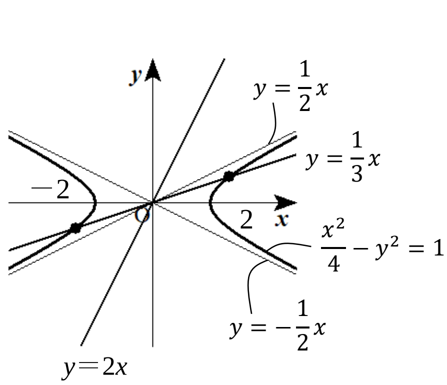
2 次方程式(＊)は異なる 2 つの実数解をもつ。

(ⅲ)　$1-4k^2<0$　　すなわち，$k<-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}<k$ のとき

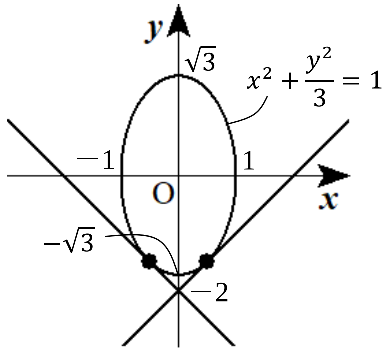
2 次方程式(＊)は実数解をもたない。

以上から，求める共有点の個数は

$$-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}\text{ のとき 2個，}\quad k\leqq-\frac{1}{2}，\ \frac{1}{2}\leqq k\text{ のとき 0個}$$



(2)　直線 $x=0$ は接線でないから，求める接線の方程式は $y=mx-2$ とおける。これを楕円の方程式に代入すると



$$x^2+\frac{(mx-2)^2}{3}=1 \qquad 3x^2+(m^2x^2-4mx+4)=3$$

$$(3+m^2)x^2-4mx+1=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2m)^2-(3+m^2)\cdot 1=3m^2-3$$

よって，$D=0$ となるのは $m=\pm 1$ のときであるから，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{y=x-2}$，$\boldsymbol{y=-x-2}$

$\boxed{6}$　**媒介変数表示**

次の問いに答えよ。

(1)　$x=2t^2$，$y=4t$ のように媒介変数表示された曲線は，t の値が変化するときどのような図形を表すか。

(2)　θ を媒介変数として，次の曲線の媒介変数表示を求めよ。

①　$x^2+y^2=9$　　　②　$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　　③　$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

(3)　$x=2\cos\theta+1$，$y=4\sin\theta-2$ のように媒介変数表示された曲線は，どのような図形を表すか。

要　点

媒介変数表示

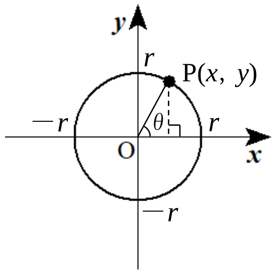
平面上の曲線がある変数，例えば t によって $x=f(t)$，$y=g(t)$で表されるとき，これをその曲線の **媒介変数表示** といい，変数 t を **媒介変数** ，または **パラメータ** という。

円の媒介変数表示

円 $x^2+y^2=r^2$ の媒介変数表示は

$\boldsymbol{x=r\cos\theta}$，

$\boldsymbol{y=r\sin\theta}$

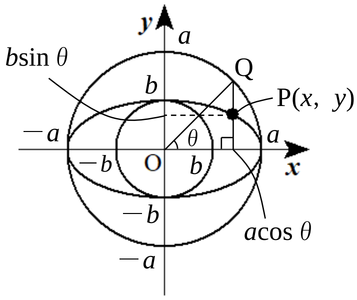


媒介変数を θ とすると，
点 $\mathrm{P}(x, y)$は
$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$
と表される。

楕円の媒介変数表示

楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，円$x^2+y^2=a^2$ をx軸を基準として，y軸方向に$\dfrac{b}{a}$倍に拡大または縮小したものである。

（ $\boxed{2}$ **楕円** (5) 参照）

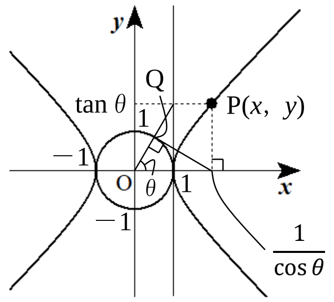


$a>b$のとき，楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，円 $x^2+y^2=a^2$ を x 軸を基準として，y軸方向に$\dfrac{b}{a}$に縮小したものである。
円上の点を $\mathrm{Q}(a\cos\theta, a\sin\theta)$ とすると，楕円上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ は　$x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$ と表される。

よって，楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の媒介変数表示は

$$\boldsymbol{x=a\cos\theta},\ \boldsymbol{y}=a\sin\theta\times\frac{b}{a}=\boldsymbol{b\sin\theta}$$

双曲線の媒介変数表示



双曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$と，三角関数の相互関係$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

を変形した，$\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2-(\tan\theta)^2=1$を比較して

$$\frac{x}{a}=\frac{1}{\cos\theta},\quad \frac{y}{b}=\tan\theta$$

が得られる。

よって，双曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$の

媒介変数表示は

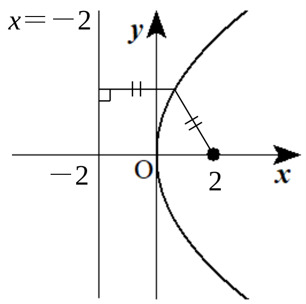
$$\boldsymbol{x=\frac{a}{\cos\theta},\quad y=b\tan\theta}$$

簡単のため，$x^2-y^2=1$で考える。単位円上に点Qをとり，動径OQの表す角をθとする。点Pのy座標は直線OQと直線$x=1$の交点のy座標と一致する。また，OQ＝1であり，$\cos\theta=\dfrac{1}{\frac{1}{\cos\theta}}$と変形できることから，双曲線上の点Pの$x$座標は，単位円上の点Qにおける接線と$x$軸との交点の$x$座標と一致する。

媒介変数表示された曲線の平行移動

$x=f(t)$，$y=g(t)$で媒介変数表示された曲線を，x軸方向にp，y軸方向にqだけ平行移動した曲線の媒介変数表示は　　$\boldsymbol{x=f(t)+p,\ y=g(t)+q}$

解答



(1)　$y=4t$より，$t=\dfrac{y}{4}$であるから，これを$x=2t^2$に代入すると

$$x=2\cdot\left(\frac{y}{4}\right)^2=\frac{y^2}{8}$$

変形すると　$y^2=8x$

よって，与えられた曲線は，**放物線 $\boldsymbol{y^2=8x}$** を表す。

(2)　①　与えられた曲線の方程式は，$x^2+y^2=3^2$と変形できるから

$$\boldsymbol{x=3\cos\theta,\quad y=3\sin\theta}$$

②　与えられた曲線の方程式は，$\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$と変形できるから

$$\boldsymbol{x=4\cos\theta,\quad y=3\sin\theta}$$

③　与えられた曲線の方程式は，$\dfrac{x^2}{1^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$と変形できるから

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{\cos\theta},\quad y=2\tan\theta}$$

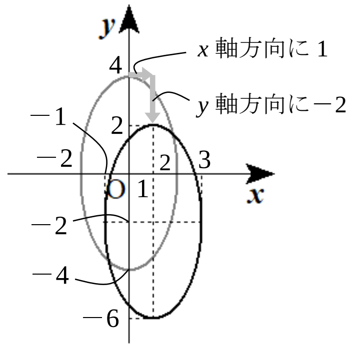
(3)　与えられた曲線は，

$x=2\cos\theta$，$y=4\sin\theta$　……①

のように媒介変数表示された曲線を

x 軸方向に 1，y 軸方向に－2

だけ平行移動した曲線である。



①は，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$ を表すから，与えられた曲線は

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動したものである。

別解　$x=2\cos\theta+1$，$y=4\sin\theta-2$ から，$\cos\theta=\dfrac{x-1}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{y+2}{4}$

これらを $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入すると　$\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y+2}{4}\right)^2=1$

よって，与えられた曲線の方程式は　$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$

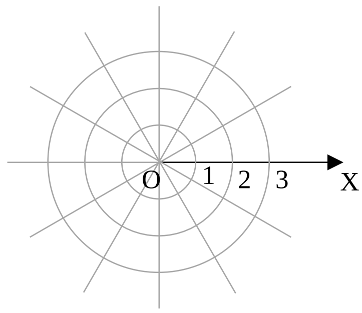
この方程式の表す図形は，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動したものである

7　極座標と直交座標

次の問いに答えよ。

(1)　極座標で表された次の点を，右の図に図示せよ。

① $\left(2,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$　② $\left(3,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$　③ $\left(1,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$



(2)　次の極座標で表される点の直交座標を求めよ。

① $\left(2,\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$　② $\left(1,\ -\dfrac{\pi}{3}\right)$

(3)　次の直交座標で表される点の極座標(r，θ)を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

① $(1,\ -1)$　② $(-\sqrt{3},\ 1)$　③ $(-3,\ 0)$

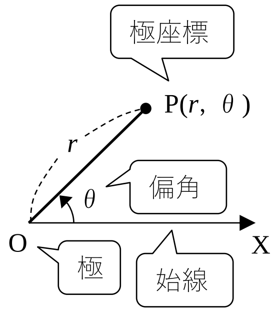
要　点

直交座標

これまで用いてきた，原点 O で直交する 2 つの数直線を用いた座標(x，y)を **直交座標** という。

極座標

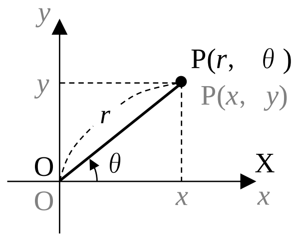
平面上に点 O と半直線 OX を定めると，平面上の点 P の位置は，線分 OP の長さ r と，OX から OP へ弧度法で測った角 θ の組(r，θ)で決まる。
このとき，(r，θ)を点 P の **極座標** といい，角 θ を **偏角** という。また，点 O を **極** ，半直線 OX を **始線** という。



極 O の極座標は，θ を任意の実数として(0，θ)と定める。極座標では，n を整数として(r，θ)と(r，$\theta+2n\pi$)は同じ点を表すが，例えば θ を $0\leqq\theta<2\pi$ とすると，ある点 P の極座標は 1 通りに定まる。

極座標と直交座標の関係

極座標の極を直交座標の原点とし，極座標の始線を直交座標の x 軸の正の部分とすると，点 P の極座標(r，θ)と直交座標(x，y)には，次の関係が成り立つ。

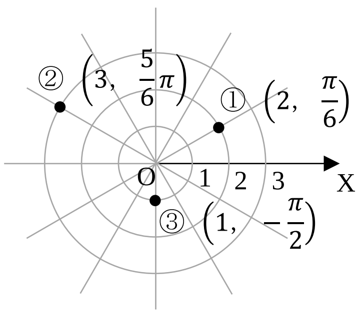


・$\boldsymbol{x=r\cos\theta}$，$\boldsymbol{y=r\sin\theta}$

・$\boldsymbol{r=\sqrt{x^2+y^2}}$，　$\boldsymbol{r\neq 0}$のとき　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{x}{r}}$，$\boldsymbol{\sin\theta=\dfrac{y}{r}}$

解答

(1)

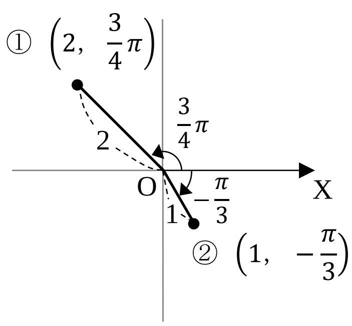


(2)　①　$x=2\cos\dfrac{3}{4}\pi=-\sqrt{2}$，$y=2\sin\dfrac{3}{4}\pi=\sqrt{2}$

　　であるから，直交座標は　$\boldsymbol{(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})}$

　②　$x=1\cdot\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$，$y=1\cdot\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

　　であるから，直交座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$



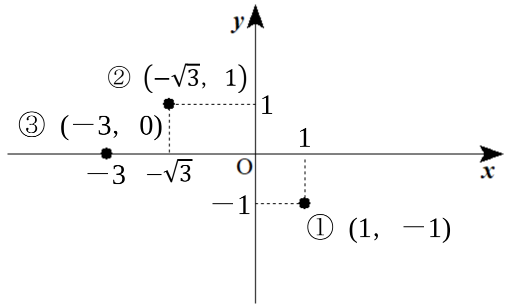
(3)　①　$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$,　　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$で，$0\leqq\theta<2\pi$であるから　$\theta=\dfrac{7}{4}\pi$

よって，極座標は　$\left(\boldsymbol{\sqrt{2},\ \dfrac{7}{4}\pi}\right)$

②　$r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$,　　$\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

で，$0\leqq\theta<2\pi$であるから　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

よって，極座標は　$\left(\boldsymbol{2,\ \dfrac{5}{6}\pi}\right)$



③　$r=\sqrt{(-3)^2+0^2}=3$，$\cos\theta=\dfrac{-3}{3}=-1$，$\sin\theta=\dfrac{0}{3}=0$ で，

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\pi$　　よって，極座標は　**$(3,\ \pi)$**

$\boxed{8}$　**極方程式**

次の問いに答えよ。

(1)　次の極方程式を求めよ。

①　中心が極 O，半径が 4 の円　　　　　②　中心の極座標が(3，0)，半径が 3 の円

③　極 O を通り，始線から測った角が$\dfrac{\pi}{6}$である直線

④　極座標が$\left(2,\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$である点 A を通り，線分 OA に垂直な直線

(2)　直交座標の方程式 $x^2+(y+1)^2=1$ を，極方程式で表せ。

(3)　極方程式 $r=2(\sin\theta-\cos\theta)$を，直交座標の方程式で表せ。

要　点

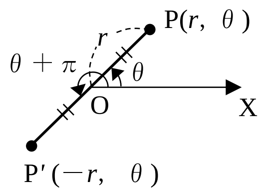
極方程式

曲線が，極座標$(r,\ \theta)$に関する方程式 $r=f(\theta)$や $g(r,\ \theta)=0$ などの形で表されるとき，これらの方程式を曲線の **極方程式** という。

極方程式では，r の値が負の場合も扱う。

$r>0$ のとき，点 $\mathrm{P}'(-r,\ \theta)$は点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$を原点に関して対称移動したものと考える。

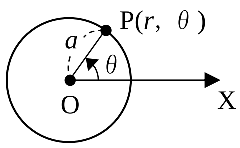
すなわち，点$(-r,\ \theta)$は点$(r,\ \theta+\pi)$と一致すると考える。



円・直線の極方程式

・中心が極 O，半径が a の円

$\boldsymbol{r=a}$

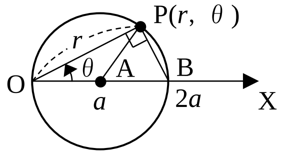


曲線上の点 P の

r　は半径 a と一致し，

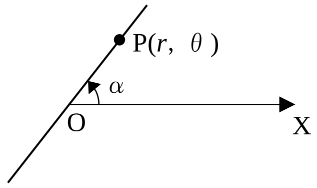
θ　は任意の値をとる。

・中心の極座標が$(a,\ 0)$,
　半径が a の円
　　　　$\boldsymbol{r=2a\cos\theta}$



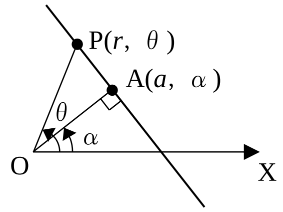
点$(a,\ 0)$を A，点$(2a,\ 0)$を B とすると，
OP$=r$，$\angle$AOP$=\theta$，OB$=2a$,
$\angle\mathrm{BPO}=\dfrac{\pi}{2}$ より　$\cos\theta=\dfrac{r}{2a}$

・極 O を通り，始線から測った
　角が α である直線
　　　　$\boldsymbol{\theta=\alpha}$



直線上の点 P の
　r は任意の値をとり,
　θ は α と一致する。

・極座標が$(a,\ \alpha)$である点 A を通り，
　線分 OA に垂直な直線
　　　　$\boldsymbol{r\cos(\theta-\alpha)=a}$



$\angle\mathrm{POA}=\theta-\alpha$ より
$\cos(\theta-\alpha)=\dfrac{a}{r}$

直交座標の方程式を極方程式に変換

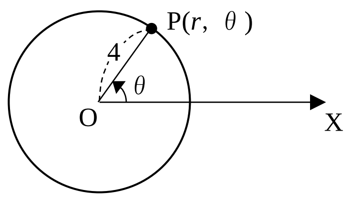
$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入して，$r=f(\theta)$や $g(r,\ \theta)=0$ などの形に整理する。

極方程式を直交座標の方程式に変換

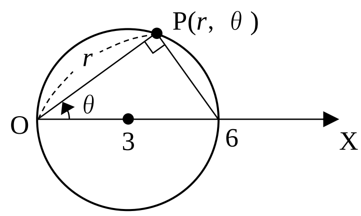
$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$，$r\sin\theta=y$ を代入して，x，y の方程式を導く。
このため，r^2，$r\cos\theta$，$r\sin\theta$ の形が現れるように極方程式を変形する。

解答

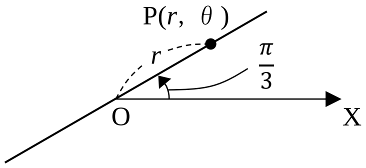
(1)　①　$\boldsymbol{r=4}$



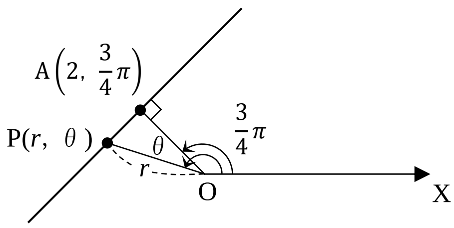
②　$\boldsymbol{r=6\cos\theta}$



③　$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{6}}$



④　$\boldsymbol{r\cos\left(\theta-\frac{3}{4}\pi\right)=2}$



(2)　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta+1)^2=1$　　$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+2r\sin\theta+1=1$　　$r(r+2\sin\theta)=0$

よって，$r=0$　または　$r=-2\sin\theta$　　$r=-2\sin\theta$ は $\theta=0$ のとき $r=0$ となるから，$r=0$ の場合を含む。したがって，求める極方程式は　$\boldsymbol{r=-2\sin\theta}$

(3)　与えられた極方程式 $r=2(\sin\theta-\cos\theta)$ の両辺に r を掛けて展開すると　$r^2=2r\sin\theta-2r\cos\theta$

$r^2=x^2+y^2$，$r\sin\theta=y$，$r\cos\theta=x$ を代入すると　$x^2+y^2=2y-2x$

変形すると　$(x^2+2x+1)-1+(y^2-2y+1)-1=0$ より　$(x+1)^2+(y-1)^2=2$

よって，求める直交座標の方程式は，円 $\boldsymbol{(x+1)^2+(y-1)^2=2}$ である。

$\boxed{\text{参考１}}$　**離心率**

楕円，双曲線も，放物線と同じように定点 F と，F を通らない定直線 l について，点 F からの距離と直線 l からの距離の比が一定である点の軌跡として定義できる。

点 P から直線 l に引いた垂線と直線 l との交点を H とするとき，

PF：PH＝e：1　（**e は正の定数**）

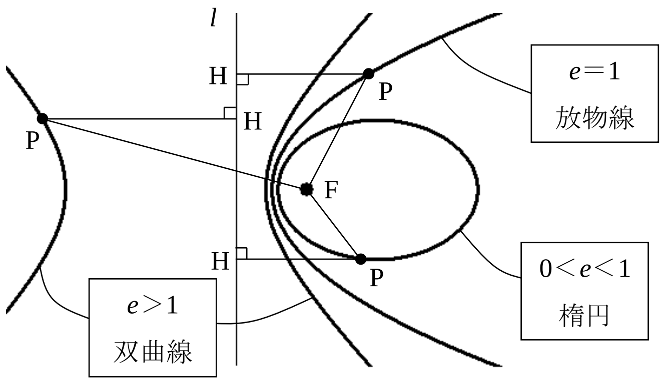
を満たす点 P の軌跡は，点 F を 1 つの焦点とした 2 次曲線で，直線 l を **準線** ，e を 2 次曲線の **離心率** という。

このとき，e の値によって 2 次曲線は次のように分類される。

$\boxed{1}$　**$0<e<1$ のとき　楕円**

$\boxed{2}$　**$e=1$ のとき　放物線**

$\boxed{3}$　**$e>1$ のとき　双曲線**



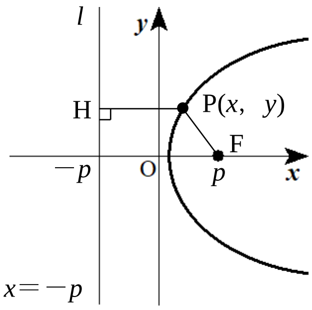
略証

$p>0$ として，点 F(p，0)からの距離と直線 l : $x=-p$ からの距離の比が e : 1 である点 P(x，y)の軌跡を考える。点 P から直線 l に引いた垂線と直線 l との交点を H とする。

$\boxed{1}$　$e=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

PH $=|x+p|$，PF $=\sqrt{(x-p)^2+y^2}$ で，PF : PH $=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$: 1 であるから

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|x+p|=\sqrt{(x-p)^2+y^2}$$



両辺を 2 乗すると　$\dfrac{1}{2}(x+p)^2=(x-p)^2+y^2$

整理すると　$x^2-6px+p^2+2y^2=0$

よって，$(x-3p)^2+2y^2=8p^2$ から　$\dfrac{(x-3p)^2}{8p^2}+\dfrac{y^2}{4p^2}=1$

したがって，点 P の軌跡は **楕円** となる。

$0<e<1$ のとき，上と同様にして点 P の軌跡は楕円であることが示せる。

〈注意〉e の値を 0 に近づけていくと，点 P の軌跡は円に近づいていくことが知られている。

$\boxed{2}$　$e=1$ のとき

「$\boxed{1}$ **放物線**」で定義済み。

$\boxed{3}$　$e=\sqrt{2}$ のとき

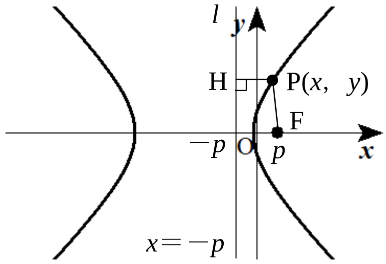
PH $=|x+p|$，PF $=\sqrt{(x-p)^2+y^2}$ で，PF : PH $=\sqrt{2}$: 1 であるから

$$\sqrt{2}|x+p|=\sqrt{(x-p)^2+y^2}$$

両辺を 2 乗すると　$2(x+p)^2=(x-p)^2+y^2$

整理すると　$x^2+6px+p^2-y^2=0$

よって，$(x+3p)^2-y^2=8p^2$ から　$\dfrac{(x+3p)^2}{8p^2}-\dfrac{y^2}{8p^2}=1$



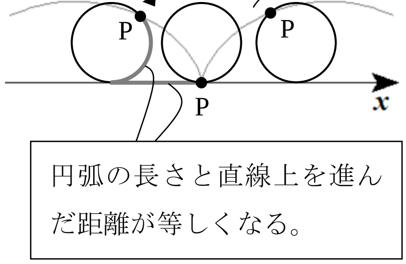
したがって，点 P の軌跡は **双曲線** となる。

$e>1$ のとき，上と同様にして点 P の軌跡は双曲線であることが示せる。

参考２　**サイクロイドの媒介変数表示**

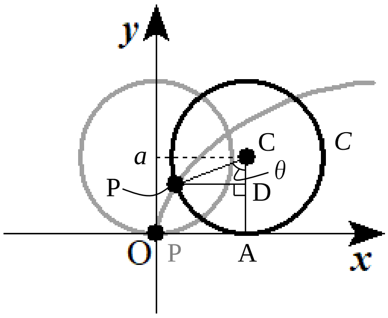
1 つの円が定直線に接しながらすべらずに回転するとき，円周上の定点 P がえがく曲線を **サイクロイド** という。円の半径を a($a>0$)とすると，サイクロイドの媒介変数表示は，次のようになる。

$$\boldsymbol{x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)}$$



証明

半径 $a(a>0)$の円 C が x 軸と原点 O で接しており，円周上の点 P が原点 O に重なっているとする。ここから円 C が角 θ だけ回転したときの点 P の座標を$(x,\ y)$とする。右の図のように，円 C の中心を C，円 C と x 軸との接点を A，点 P から直線 CA に引いた垂線と直線 CA との交点を D とする。



∠PCA$=\theta$ であるから

$$\mathrm{OA}=\overset{\frown}{\mathrm{PA}}=a\theta,\quad \mathrm{PD}=a\sin\theta,\quad \mathrm{CD}=a\cos\theta$$

よって　$x=\mathrm{OA}-\mathrm{PD}=a\theta-a\sin\theta=a(\theta-\sin\theta)$,　　$y=\mathrm{AC}-\mathrm{CD}=a-a\cos\theta=a(1-\cos\theta)$

上では $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のときを示したが，θが任意の値のときも同様に示すことができる。

以上から，サイクロイドの媒介変数表示は　$\boldsymbol{x=a(\theta-\sin\theta)}$,　　$\boldsymbol{y=a(1-\cos\theta)}$

参考３　**コンピュータで表示できるいろいろな曲線**

媒介変数や極方程式で表されたいろいろな曲線を，コンピュータを利用して表示してみよう。

GRAPES

フリーのグラフ描画アプリ「GRAPES」を紹介します。下記の URL からダウンロードできます。

https://tomodak.com/grapes/

以下では，「GRAPES」を利用していろいろな曲線を表示します。

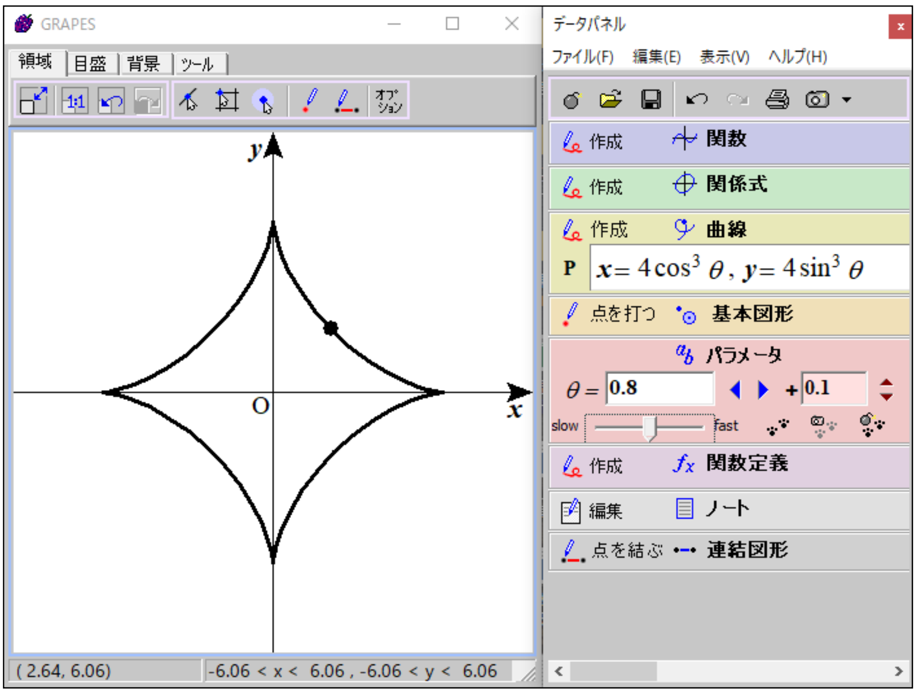
(1)　**アステロイド**

a を正の定数とし，θ を媒介変数として

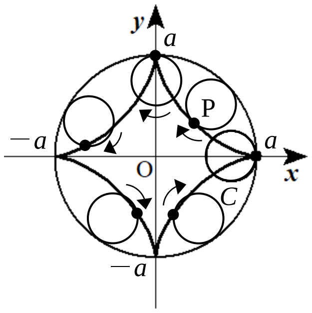
$\boldsymbol{x=a\cos^3\theta}$,　　$\boldsymbol{y=a\sin^3\theta}$

で表される曲線を **アステロイド** という。

$a=4$ とすると，右の図のような曲線になる。



アステロイドは，半径 a の円 O の内側を半径$\dfrac{1}{4}a$の円Cが接しながらすべらずに回転するときの，円 C 上の定点 P のえがく曲線であり，内サイクロイドの 1 種である。



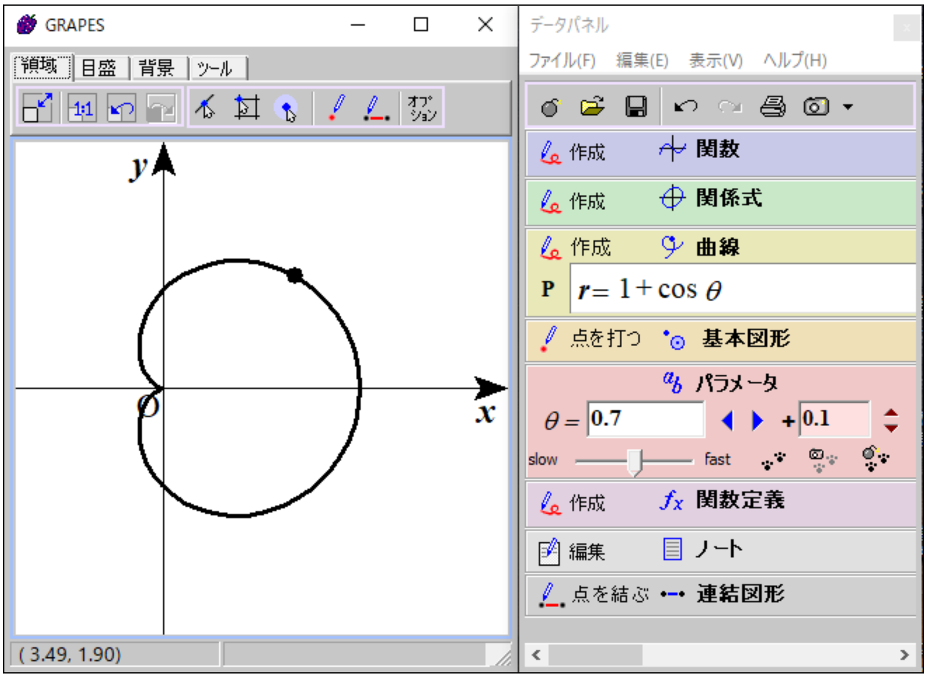
(2)　**カージオイド**

a を正の定数とし，極方程式

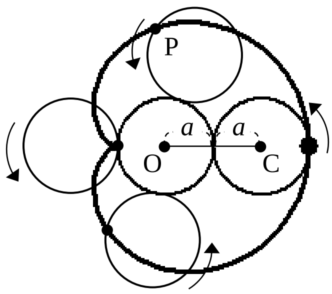
$$\boldsymbol{r=a(1+\cos\theta)}$$

で表される曲線を **カージオイド** という。

$a=1$ とすると，右の図のような曲線になる。



カージオイドは，半径 a の円 O の外側を半径 a の円 C が接しながらすべらずに回転するときの，円 C 上の定点 P のえがく曲線であり，外サイクロイドの 1 種である。



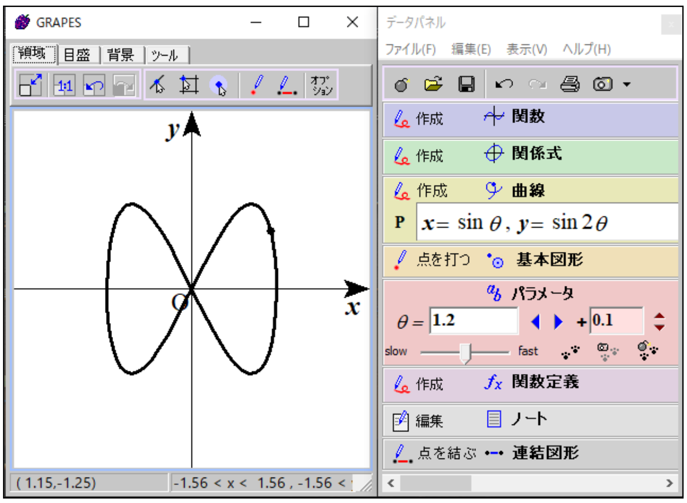
(3)　**リサジュー曲線**

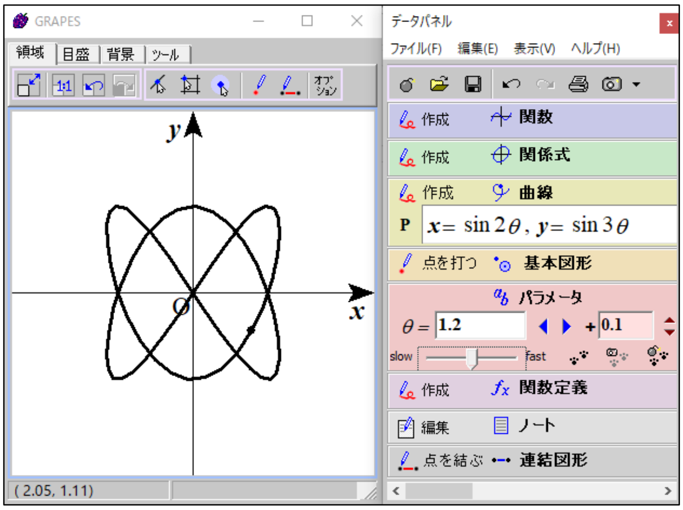
m，n を自然数とするとき，θ を媒介変数として

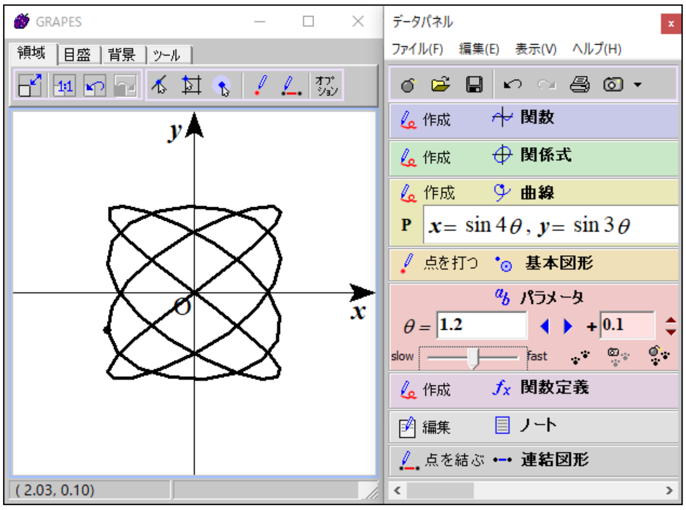
$$\boldsymbol{x=\sin m\theta,\quad y=\sin n\theta}$$

で表される曲線を **リサジュー曲線** という。

変域を $0\leqq\theta\leqq2\pi$ とし，m，n にいろいろな値を代入すると，右や次ページの図のような曲線になる。





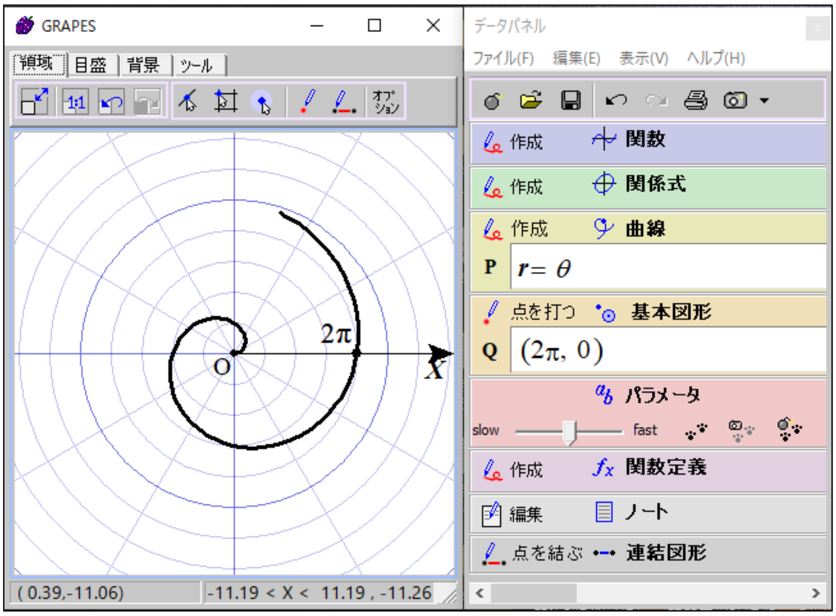


(4)　**アルキメデスのらせん**

a を正の定数とするとき，
極方程式

$$r=a\theta$$

で表される曲線を
アルキメデスのらせん という。
$a=1$，$\theta\geqq 0$ とすると，右の図のような曲線になる。

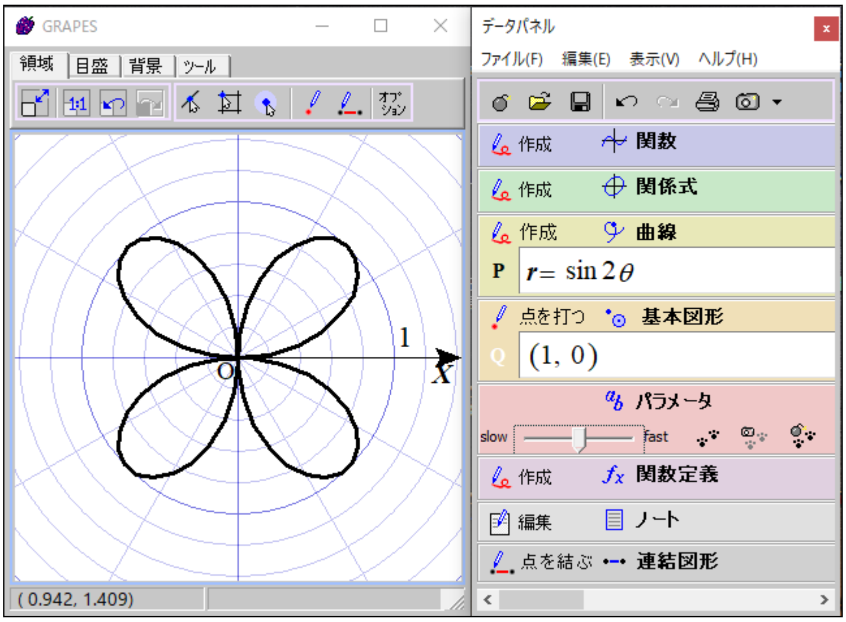


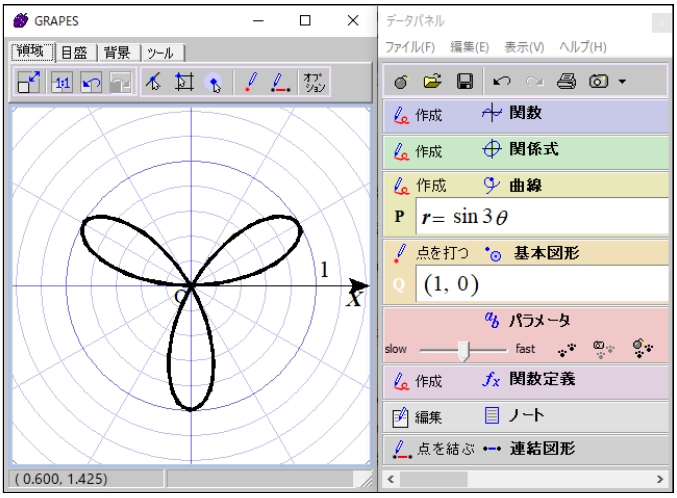
(5)　**正葉曲線（バラ曲線）**

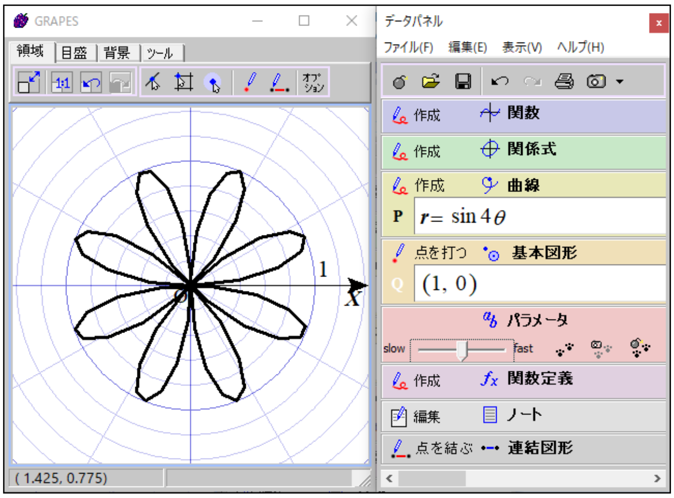
a を正の定数，n を自然数とするとき，極方程式

$$r=a\sin n\theta$$

で表される曲線を
正葉曲線　(rose curve：バラ曲線)
という。
$a=1$，変域を $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ とし，
n にいろいろな値を
代入すると，右や次ページの図のような曲線になる。







・a は極から最も遠くなる点までの距離
・n が奇数のときは葉は n 枚，n が偶数のときは葉は $2n$ 枚
である。
また，n を分数にしたり，sin を cos に変えてもきれいな曲線になる。
極方程式や変域，パラメータを変更して，いろいろな正葉曲線を表示してみよう。

(6)　**レムニスケート**

a を正の定数とするとき，直交座標の方程式　$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$
で表される曲線を **レムニスケート** という。$a=1$ とすると，右下の図のような曲線になる。
この曲線は，2 点(1，0)，(−1，0)からの距離の積が 1 である点 P の軌跡である。
また，レムニスケートを
極方程式で表すと

$$r^2=2a^2\cos 2\theta$$

となる。