# 式の展開と因数分解

**1**　整式

(1)　次の整式の同類項をまとめて整理せよ。

①　$3x-x^2+4x+5+2x^2$　　②　$2x^2+3xy+2x+2xy+3y^2+2y+2x+3y+2$

(2)　次の整式の［　］内の文字に着目したときの次数と定数項を答えよ。

①　$x^2+2xy+y^2-1$　［$x$］　　②　$a^3+a^2b^2+2a^2+2b-2$　［$a$］，［$a$ と $b$］

(3)　次の整式を，$x$ について降べきの順に整理せよ。

①　$2x+x^3-2-x^2$　　②　$x^2+y^2+1+2xy+2y+2x$

(4)　$A=x^2-xy+y^2$，$B=3x^2+3xy-y^2$ のとき，次の計算をせよ。

①　$A+B$　　②　$4B-\{3A-2(A-2B)\}$

## 要　点

**単項式**

$2x$ や $-3ay^2$ のように，文字や数の積として表される式を **単項式** という。単項式において，掛けた文字の個数を **次数** といい，数の部分を **係数** という。

**整式**

単項式の和として表される式を **多項式** といい，各単項式をその多項式の **項** という。単項式と多項式を合わせて **整式** という。

**整式の整理**

・整式において，文字の部分が同じである項を **同類項** という。

・同類項をまとめた整式において，各項の次数のうちで最も高いものをその整式の **次数** といい，次数が $n$ である整式を **$n$ 次式** という。2 種類以上の文字を含む整式では，ある特定の文字だけに着目して次数を考えることもある。着目した文字を含まない項を **定数項** という。

・整式は，ある文字について，次のように整理して表すことが多い。

**降べきの順** に整理……次数の高い項から低い項へ順に並べる。

**昇べきの順** に整理……次数の低い項から高い項へ順に並べる。

〈注意〉先頭の項を見れば，その整式の次数が分かるなどの理由から，降べきの順に整理することが多い。

## 解答

(1)　①　$3x-x^2+4x+5+2x^2=(-1+2)x^2+(3+4)x+5=\boldsymbol{x^2+7x+5}$

②　$2x^2+3xy+2x+2xy+3y^2+2y+2x+3y+2=2x^2+(3+2)xy+3y^2+(2+2)x+(2+3)y+2$

$=\boldsymbol{2x^2+5xy+3y^2+4x+5y+2}$

(2)　①　**次数は 2，定数項は $\boldsymbol{y^2-1}$**

②　整式 $a^3+a^2b^2+2a^2+2b-2$ において，

**$\boldsymbol{a}$ に着目すると，次数は 3，定数項は $\boldsymbol{2b-2}$**

**$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に着目すると，次数は 4，定数項は $\boldsymbol{-2}$**

(3)　①　$2x+x^3-2-x^2=\boldsymbol{x^3-x^2+2x-2}$

②　$x^2+y^2+1+2xy+2y+2x=\boldsymbol{x^2+2(y+1)x+y^2+1+2y}$

(4)　①　$A+B=(x^2-xy+y^2)+(3x^2+3xy-y^2)=x^2-xy+y^2+3x^2+3xy-y^2$

$=\boldsymbol{4x^2+2xy}$

②　$4B-\{3A-2(A-2B)\}=4B-(3A-2A+4B)$

$=4B-A-4B$

$=-A$

$=-(x^2-xy+y^2)$

$=\boldsymbol{-x^2+xy-y^2}$

まず，$A$，$B$ について整理してから代入する方が，最初から代入して計算するより計算量が少なくなることが多い。

**2**　**整式の乗法**

(1)　次の式を計算せよ。

①　$x^2\times3x^3$　　②　$(-a^3b)^2\times2a^2b$

(2)　次の式を展開せよ。

①　$3xy(x-2y)$　　②　$(2a-1)(3a+2b-1)$

**要　点**

**指数法則**

$m$，$n$ が正の整数のとき，次の指数法則が成り立つ。

$\boldsymbol{a^m\times a^n=a^{m+n}}$　　$\boldsymbol{(a^m)^n=a^{mn}}$　　$\boldsymbol{(ab)^n=a^nb^n}$

**分配法則**

いくつかの整式の積を 1 つの整式で表すことを **展開** するという。式の展開では，次の分配法則が用いられる。

$\boldsymbol{A(B+C)=AB+AC}$　　$\boldsymbol{(A+B)C=AC+BC}$

## 解答

(1)　①　$x^2\times3x^3=3\times x^{2+3}=\boldsymbol{3x^5}$

②　$(-a^3b)^2\times2a^2b=(-1)^2a^{3\times2}b^2\times2a^2b=2\times a^{6+2}\times b^{2+1}=\boldsymbol{2a^8b^3}$

(2)　①　$3xy(x-2y)=3xy\cdot x+3xy\cdot(-2y)=\boldsymbol{3x^2y-6xy^2}$

②　$(2a-1)(3a+2b-1)=2a(3a+2b-1)-1\cdot(3a+2b-1)=6a^2+4ab-2a-3a-2b+1$

$=\boldsymbol{6a^2+4ab-5a-2b+1}$

〈注意〉積 $3xy\times x$ を $3xy\cdot x$ と書くことがある。

**3　乗法公式**

次の式を展開せよ。

(1)　$(x+2)^2$　　(2)　$(3x-2y)^2$　　(3)　$(a+4)(a-4)$

(4)　$(x+2)(x-3)$　　(5)　$(x+5)(2x-3)$　　(6)　$(3a+b)(2a-3b)$

**要　点**

次の乗法公式を利用する。

1　$\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$　　$\boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$

2　$\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$

3　$\boldsymbol{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$

4　$\boldsymbol{(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd}$

## 解答

(1)　$(x+2)^2=x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2=\boldsymbol{x^2+4x+4}$

(2)　$(3x-2y)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 2y+(2y)^2=\boldsymbol{9x^2-12xy+4y^2}$

(3)　$(a+4)(a-4)=a^2-4^2=\boldsymbol{a^2-16}$

(4)　$(x+2)(x-3)=x^2+(2-3)x+2\cdot(-3)=\boldsymbol{x^2-x-6}$

(5)　$(x+5)(2x-3)=(1\cdot 2)x^2+\{1\cdot(-3)+5\cdot 2\}x+5\cdot(-3)=\boldsymbol{2x^2+7x-15}$

(6)　$(3a+b)(2a-3b)=(3\cdot 2)a^2+\{3\cdot(-3b)+b\cdot 2\}a+b\cdot(-3b)=\boldsymbol{6a^2-7ab-3b^2}$

〈注意〉式の展開は，分配法則を用いると必ず計算できる。例えば，$\boxed{3}$ (6) は，$\boxed{2}$ (2) ②のように

$$(3a+b)(2a-3b)=3a(2a-3b)+b(2a-3b)=6a^2-9ab+2ab-3b^2$$
$$=6a^2-7ab-3b^2$$

とすることもできる。

**4　展開の工夫**

次の式を展開せよ。

(1)　$(x+y+z)(x+y-z)$　　(2)　$(a+b+c)^2$

(3)　$(x+2)^2(x-2)^2$　　(4)　$(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)$

**要　点**

(1)，(2)　置き換えを利用する。

(3)，(4)　掛け合わせる順番を工夫する。

## 解答

(1)　$x+y=A$ とおくと　$(x+y+z)(x+y-z)=(A+z)(A-z)=A^2-z^2=(x+y)^2-z^2$

$$=\boldsymbol{x^2+2xy+y^2-z^2}$$

(2)　$a+b=A$ とおくと

$$(a+b+c)^2=(A+c)^2=A^2+2Ac+c^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$
$$=\boldsymbol{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$$

〈注意〉$\boldsymbol{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$　は公式として覚えておくとよい。

(3)　$(x+2)^2(x-2)^2=\{(x+2)(x-2)\}^2=(x^2-4)^2=\boldsymbol{x^4-8x^2+16}$

(4)　$(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)=\{(a+1)(a+4)\}\{(a+2)(a+3)\}=(a^2+5a+4)(a^2+5a+6)$

$$=\{(a^2+5a)+4\}\{(a^2+5a)+6\}$$
$$=(a^2+5a)^2+10(a^2+5a)+24$$
$$=a^4+10a^3+25a^2+10a^2+50a+24$$
$$=\boldsymbol{a^4+10a^3+35a^2+50a+24}$$

共通の式 $a^2+5a$ が出るように，掛け合わせる順番を工夫する。

5　**因数分解(1)**

次の式を因数分解せよ。

(1)　$4x^2y+6xy^3$　　(2)　$a^2+6a+9$　　(3)　$4x^2-20xy+25y^2$

(4)　$x^2-49$　　(5)　$x^2+5x+6$　　(6)　$a^2-ab-12b^2$

**要　点**

1 つの整式を 2 つ以上の整式の積の形に変形することを **因数分解** するといい，積を作っている各整式を **因数** という。

**共通因数のくくり出し**

整式の各項に共通な因数があれば，それをかっこの外にくくり出す。

$$\boldsymbol{ma+mb=m(a+b)}$$

**因数分解の公式**

乗法公式の逆の計算である，次の因数分解の公式を利用する。

1　$\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}$　　$\boldsymbol{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}$

2　$\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$

3　$\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)}$

## 解答

(1)　$4x^2y+6xy^3=2xy\cdot 2x+2xy\cdot 3y^2=\boldsymbol{2xy(2x+3y^2)}$

(2)　$a^2+6a+9=a^2+2\cdot a\cdot 3+3^2=\boldsymbol{(a+3)^2}$

(3)　$4x^2-20xy+25y^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 5y+(5y)^2=\boldsymbol{(2x-5y)^2}$

(4)　$x^2-49=x^2-7^2=\boldsymbol{(x+7)(x-7)}$

(5)　$x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\cdot 3=\boldsymbol{(x+2)(x+3)}$

(6)　$a^2-ab-12b^2=a^2+(3b-4b)a+3b\cdot(-4b)=\boldsymbol{(a+3b)(a-4b)}$

## 6　因数分解 (2)（たすき掛けの利用）

次の式を因数分解せよ。

(1)　$2x^2+5x-3$

(2)　$6x^2-5xy-4y^2$

## 要　点

乗法公式の逆の計算である，次の因数分解の公式を利用する。

**4**　$\boldsymbol{acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)}$

これは右のような図を用いるとよい。このような因数分解の方法を **たすき掛け** という。

$$\begin{array}{ccccc} a & & b & \longrightarrow & bc \\ & \times & & & \\ c & & d & \longrightarrow & ad \\ \hline & & & & ad+bc \end{array}$$

(1)　$2x^2+5x-3$　を，たすき掛けを利用して因数分解してみよう。

$2x^2+5x-3=(ax+b)(cx+d)$ と因数分解できるとすると，$2x^2+5x-3=acx^2+(ad+bc)x+bd$ と書ける。

$ac=2$，$bd=-3$ から，$ad+bc=5$ となる $a$，$b$，$c$，$d$ を見つければよい。$a=1$，$c=2$ とする。このとき $(b,\ d)=(1,\ -3)$，$(-1,\ 3)$，$(3,\ -1)$，$(-3,\ 1)$ から，次の 4 つの場合が考えられる。

①
$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & \longrightarrow & 2 \\ & \times & & & \\ 2 & & -3 & \longrightarrow & -3 \\ \hline & & & & -1 \end{array}$$

②
$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -1 & \longrightarrow & -2 \\ & \times & & & \\ 2 & & 3 & \longrightarrow & 3 \\ \hline & & & & 1 \end{array}$$

③
$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 3 & \longrightarrow & 6 \\ & \times & & & \\ 2 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline & & & & 5 \end{array}$$

④
$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -3 & \longrightarrow & -6 \\ & \times & & & \\ 2 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline & & & & -5 \end{array}$$

このうち，$ad+bc=5$ を満たすのは③の場合であるから

$$2x^2+5x-3=(x+3)(2x-1)$$

## 解答

(1)　$2x^2+5x-3=\boldsymbol{(x+3)(2x-1)}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 3 & \longrightarrow & 6 \\ & \times & & & \\ 2 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline & & & & 5 \end{array}$$

(2)　$6x^2-5xy-4y^2=\boldsymbol{(2x+y)(3x-4y)}$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & y & \longrightarrow & 3y \\ & \times & & & \\ 3 & & -4y & \longrightarrow & -8y \\ \hline & & & & -5y \end{array}$$

## 7　因数分解の工夫（置き換えの利用）

次の式を因数分解せよ。

(1)　$(x+y)^2+2(x+y)-8$　　(2)　$a-1+b(1-a)$

(3)　$x^2+2xy+y^2-4$　　(4)　$(a-3b)(a-3b+3)-10$

### 要　点

(1)　$x+y=A$ とおく。

(2)，(3)　置き換えが利用できるように変形する。

(4)　$a-3b=A$ とおく。

### 解答

(1)　$x+y=A$ とおくと　$(x+y)^2+2(x+y)-8=A^2+2A-8=(A+4)(A-2)=\boldsymbol{(x+y+4)(x+y-2)}$

(2)　$a-1+b(1-a)=(a-1)-b(a-1)$ から，$a-1=A$ とおくと

$a-1+b(1-a)=A-bA=A(1-b)=\boldsymbol{(a-1)(1-b)}$

(3)　$x^2+2xy+y^2-4=(x+y)^2-4$ から，$x+y=A$ とおくと

$x^2+2xy+y^2-4=A^2-4=(A+2)(A-2)=\boldsymbol{(x+y+2)(x+y-2)}$

(4)　$a-3b=A$ とおくと　$(a-3b)(a-3b+3)-10=A(A+3)-10=A^2+3A-10=(A+5)(A-2)$

$=\boldsymbol{(a-3b+5)(a-3b-2)}$

## 8　因数分解の工夫（1 つの文字について整理する）

次の式を因数分解せよ。

(1)　$a^2+ab-2b-4$　　(2)　$x^2+xy-2y^2+2x-5y-3$

### 要　点

(1)　複数の種類の文字を含む式の因数分解では, 次数の低い文字, 本問では $b$ について整理するとよい。

(2)　$x$，$y$ どちらについても 2 次式で，次数が同じである。このとき，$x^2$ の係数が 1 である $x$ について整理すると計算量が少なくなることが多い。$y$ について整理しても因数分解できる。

### 解答

(1)　$a^2+ab-2b-4=(a-2)b+a^2-4=(a-2)b+(a+2)(a-2)=(a-2)(b+a+2)$

$=\boldsymbol{(a-2)(a+b+2)}$

(2)　$x^2+xy-2y^2+2x-5y-3=x^2+(y+2)x-(2y^2+5y+3)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & & 3 & \longrightarrow & 3 \\ \hline & & & & 5 \end{array}$$

$=x^2+(y+2)x-(y+1)(2y+3)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -(y+1) & \longrightarrow & -y-1 \\ 1 & & (2y+3) & \longrightarrow & 2y+3 \\ \hline & & & & y+2 \end{array}$$

$=\{x-(y+1)\}\{x+(2y+3)\}$

$=\boldsymbol{(x-y-1)(x+2y+3)}$

$\boxed{\text{別解}}$ $x^2+xy-2y^2+2x-5y-3=-2y^2+(x-5)y+(x^2+2x-3)$

$$\begin{aligned}&=-2y^2+(x-5)y+(x-1)(x+3)\\&=\{-y+(x-1)\}\{2y+(x+3)\}\\&=(x-y-1)(x+2y+3)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} -1 & \searrow\!\!\!\!\nearrow & (x-1) & \longrightarrow & 2x-2 \\ 2 & & (x+3) & \longrightarrow & -x-3 \\ \hline & & & & x-5 \end{array}$$

**研究１**　**3 次式の乗法公式，因数分解の公式**

(1)　次の式を展開せよ。

①　$(x+2)^3$　　②　$(3a-4b)^3$

③　$(a-3)(a^2+3a+9)$　　④　$(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

(2)　次の式を因数分解せよ。

①　$x^3+8$　　②　$27x^3-125y^3$

**要　点**

展開は，次の 3 次式の乗法公式を利用する。

$\boxed{5}$　$\boldsymbol{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$　　$\boldsymbol{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

$\boxed{6}$　$\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}$　　$\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$

〈注意〉次のように実際に展開すると確認できる。

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)\\&=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2)&=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\&=a^3+b^3\end{aligned}$$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$，$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ も同様に確認できる。

因数分解は，乗法公式の逆である次の公式を利用する。

$\boxed{6}$　$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$　　$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

## 解答

(1)　①　$(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3=\boldsymbol{x^3+6x^2+12x+8}$

②　$(3a-4b)^3=(3a)^3-3\cdot(3a)^2\cdot 4b+3\cdot 3a\cdot(4b)^2-(4b)^3$

$=\boldsymbol{27a^3-108a^2b+144ab^2-64b^3}$

③　$(a-3)(a^2+3a+9)=(a-3)(a^2+a\cdot 3+3^2)=a^3-3^3=\boldsymbol{a^3-27}$

④　$(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)=(2x+3y)\{(2x)^2-2x\cdot 3y+(3y)^2\}=(2x)^3+(3y)^3$

$=\boldsymbol{8x^3+27y^3}$

(2)　①　$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)=\boldsymbol{(x+2)(x^2-2x+4)}$

②　$27x^3-125y^3=(3x)^3-(5y)^3=(3x-5y)\{(3x)^2+3x\cdot 5y+(5y)^2\}$

$=\boldsymbol{(3x-5y)(9x^2+15xy+25y^2)}$

**研究２**　**複 2 次式の因数分解**

次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^4-10x^2+9$

(2)　$x^4+x^2+1$

〈注意〉$x^2=X$ とおくと 2 次式 $aX^2+bX+c$ となる式，すなわち，$ax^4+bx^2+c$ の形の式を **複 2 次式** という。

**要　点**

(1)　$x^4=(x^2)^2$ であるから，$x^2=X$ とおく。

(2)　複 2 次式において，本問のように $x^2=X$ とおいても因数分解できないものは，$(\quad)^2-(\quad)^2$ の形に変形することを考える。

## 解答

(1)　$x^2=X$ とおくと

$$
\begin{aligned}
x^4-10x^2+9&=(x^2)^2-10x^2+9\\
&=X^2-10X+9\\
&=(X-1)(X-9)\\
&=(x^2-1)(x^2-9)\\
&=\boldsymbol{(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)}
\end{aligned}
$$

(2)　$(x^2+1)^2=x^4+2x^2+1$ から

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$$

と変形できる。このことから

$$
\begin{aligned}
x^4+x^2+1&=(x^2+1)^2-x^2\\
&=\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}\\
&=\boldsymbol{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}
\end{aligned}
$$