積分法

1　**不定積分**

(1)　不定積分 $\int \frac{(x-1)^3}{x^3}\,dx$ を求めよ。

(2)　次の不定積分を求めよ。

①　$\int (\sin x + 2\cos x)\,dx$　　　②　$\int \tan^2 x\,dx$

(3)　不定積分 $\int (e^x - 3^x)\,dx$ を求めよ。

要　点

不定積分

・関数 $f(x)$に対して，微分すると $f(x)$になる関数 $F(x)$，すなわち $F'(x)=f(x)$となる $F(x)$を，$f(x)$の **原始関数** という。また，任意の定数 C について，$\{F(x)+C\}'=F'(x)=f(x)$が成り立つから，$F(x)+C$ は $f(x)$の原始関数である。

・関数 $f(x)$の原始関数の 1 つを $F(x)$とすると，$f(x)$の任意の原始関数は $F(x)+C$ の形で表すことができる。

これを $\int \boldsymbol{f(x)\,dx}$ で表し，$f(x)$の **不定積分** という。

このとき，$f(x)$を **被積分関数**，x を **積分変数**，定数 C を **積分定数** という。$f(x)$の不定積分を求めることを **$f(x)$を積分する** という。

$$\boldsymbol{F(x)+C} \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{f(x)}$$

以上をまとめると，$F'(x)=f(x)$のとき

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx = F(x) + C}$$　ただし，Cは積分定数

〈注意〉以後，特に断らない限り C は積分定数を表すものとする。

不定積分の性質

k，l を定数とする。

・$\int \boldsymbol{kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx}$

・$\int \boldsymbol{\{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$

・$\int \boldsymbol{\{f(x)-g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx}$

・$\int \boldsymbol{\{kf(x)+lg(x)\}\,dx = k\int f(x)\,dx + l\int g(x)\,dx}$

x^{α} の不定積分

導関数の公式　$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha}$　　ただし，αは実数　　　$(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$

から，次の公式が成り立つ。

$\alpha \neq -1$ のとき　$$\boldsymbol{\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C}$$

$\alpha = -1$ のとき　$$\boldsymbol{\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C}$$

三角関数の不定積分

$$(\cos x)' = -\sin x\,,\qquad (\sin x)' = \cos x\,,\qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\qquad \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

から，次の公式が成り立つ。

$$\boldsymbol{\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,}$$

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C,\qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C}$$

指数関数の不定積分

$(e^x)' = e^x,$　　$(a^x)' = a^x \log a$　　ただし　$a > 0$，$a \neq 1$

から，次の公式が成り立つ。

$$\boldsymbol{\int e^x\,dx = e^x + C,\qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C}$$　ただし　$a > 0$，$a \neq 1$

解答

C は積分定数とする。

(1)　$$\int \frac{(x-1)^3}{x^3}dx = \int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3}dx = \int\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx = \int (x^0-3x^{-1}+3x^{-2}-x^{-3})\,dx$$

$$= \frac{1}{0+1}x^{0+1} - 3\log|x| + 3\cdot\frac{1}{-2+1}x^{-2+1} - \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C$$

$$= x - 3\log|x| - 3x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2} + C = \boldsymbol{x - 3\log|x| - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + C}$$

(2)　①　$$\int (\sin x + 2\cos x)\,dx = \boldsymbol{-\cos x + 2\sin x + C}$$

②　$$\int \tan^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \boldsymbol{\tan x - x + C}$$

(3)　$$\int (e^x - 3^x)\,dx = \boldsymbol{e^x - \frac{3^x}{\log 3} + C}$$

〈注意〉求めた不定積分を微分すると，被積分関数となる。

$\boxed{2}$ 不定積分の置換積分法

次の不定積分を求めよ。

(1) ① $\displaystyle\int \sqrt[3]{2x+1}\,dx$　② $\displaystyle\int \sin(3x-2)\,dx$

(2) ① $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$　② $\displaystyle\int x\sqrt{x-3}\,dx$

(3) ① $\displaystyle\int 2x\,e^{x^2}\,dx$　② $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$　③ $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

(4) ① $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx$　② $\displaystyle\int \tan x\,dx$

要　点

積分は，微分と逆の計算であり，微分すると被積分関数になる原始関数を求める計算である。微分のように決まった計算手順があるわけではなく，被積分関数が簡単な形であっても，高校数学の範囲では積分できないものも存在する。ここでは，積分変数を置換することにより積分できるようになるものを考える。

不定積分の置換積分法

$F(x)=\displaystyle\int f(x)\,dx$ において，xを微分可能なtの関数$x=g(t)$で置き換えると，$F(x)=F(g(t))$はtの関数になる。このとき，合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dt}F(x)=\frac{d}{dx}F(x)\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)g'(t)=f(g(t))g'(t)$$

よって　$\boldsymbol{F(x)=\displaystyle\int f(g(t))g'(t)\,dt}$

以上から，次の置換積分法の公式が得られる。

$\boxed{1}$　$\boldsymbol{\displaystyle\int f(x)\,dx=\int f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt}$　　ただし　$\boldsymbol{x=g(t)}$

この公式は，$\displaystyle\int f(x)\,dx$ において，形式的にxを$g(t)$に，dxを$g'(t)dt$に置き換えたものになっている。ここで，dxと$g'(t)dt$の置き換えであるが，$x=g(t)$の両辺をtで微分した$\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$を，$dx=g'(t)dt$ と見ればよい。

また，被積分関数が $f(g(x))g'(x)$の形になっているとき，公式$\boxed{1}$の左辺と右辺を入れかえて，t と x を入れかえた次の公式が得られる。

$\boxed{2}$　$\boldsymbol{\displaystyle\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt}$　　ただし　$\boldsymbol{g(x)=t}$

$\boldsymbol{f(ax+b)}$，　$\{\boldsymbol{g(x)}\}^{\boldsymbol{\alpha}}\,\boldsymbol{g'(x)}$，　$\boldsymbol{\dfrac{g'(x)}{g(x)}}$の不定積分

$ax+b=t$とおくと，形式的に$adx=dt$とみて　$\displaystyle\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\int f(t)\,dt$　となる。

例えば，(1) ①は，$2x+1=t$とおくと，$\displaystyle\int\sqrt[3]{2x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{3}}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}+1}t^{\frac{1}{3}+1}+C$　となる。

また，$\{g(x)\}^{\alpha}\,g'(x)$の形になっている(3) ②は，$\sin x=t$ とおくと $\cos x dx=dt$ であるから

$\displaystyle\int\sin^3 x\cos x\,dx=\int t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4+C$　となる。さらに，$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$の形になっている(4) ①は，

$x^2+2=t$とおくと $2xdx=dt$であるから　$\displaystyle\int\frac{2x}{x^2+2}dx=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+C$　となる。

解答

C は積分定数とする。

(1)　①　$2x+1=t$とおくと，$dx=\dfrac{1}{2}dt$より

$$\int\sqrt[3]{2x+1}\,dx=\int\sqrt[3]{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}+1}t^{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{8}t^{\frac{4}{3}}+C=\boldsymbol{\frac{3}{8}(2x+1)\sqrt[3]{2x+1}+C}$$

②　$3x-2=t$とおくと，$dx=\dfrac{1}{3}dt$より

$$\int\sin(3x-2)\,dx=\int\sin t\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int\sin t\,dt=-\frac{1}{3}\cos t+C=\boldsymbol{-\frac{1}{3}\cos(3x-2)+C}$$

(2)　①　$x+1=t$とおくと，$x=t-1$，$dx=dt$より

$$\int\frac{x}{(x+1)^2}dx=\int\frac{t-1}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\log|t|-\frac{1}{-2+1}t^{-2+1}+C=\log|t|+\frac{1}{t}+C$$

$$=\boldsymbol{\log|x+1|+\frac{1}{x+1}+C}$$

②　$x-3=t$とおくと，$x=t+3$，$dx=dt$より

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx=\int(t+3)\sqrt{t}\,dt=\int\left(t^{\frac{3}{2}}+3t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}t^{\frac{3}{2}+1}+3\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+2t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{5}t^{\frac{3}{2}}(t+5)+C=\boldsymbol{\frac{2}{5}(x-3)(x+2)\sqrt{x-3}+C}$$

$\boxed{\text{別解}}$　$\sqrt[n]{f(x)}$の形の式を含むときは，$\sqrt[n]{f(x)}=t$とおく方が計算がラクになる場合が多い。

$\sqrt{x-3}=t$とおくと$x-3=t^2$から，$x=t^2+3$，$dx=2tdt$より

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx=\int(t^2+3)\cdot t\cdot 2t\,dt=\int(2t^4+6t^2)\,dt=\frac{2}{5}t^5+2t^3+C=\frac{2}{5}t^3(t^2+5)+C$$

$$=\frac{2}{5}(x-3)(x+2)\sqrt{x-3}+C$$

(3)　①　$x^2 = t$とおくと，$2xdx = dt$より　$\displaystyle\int 2xe^{x^2}\,dx = \int e^{x^2}\cdot 2x\,dx = \int e^t\,dt = e^t + C = \boldsymbol{e^{x^2} + C}$

②　$\sin x = t$とおくと，$\cos x\,dx = dt$より　$\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx = \int t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \boldsymbol{\frac{1}{4}\sin^4 x + C}$

③　$x^2 + 2 = t$とおくと，$2xdx = dt$より

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{t} + C = \boldsymbol{2\sqrt{x^2+2} + C}$$

〈注意〉$\sqrt{x^2+2} = t$とおいてもよい。

(4)　①　$x^2 + 2 = t$とおくと，$2xdx = dt$より

$$\int \frac{2x}{x^2+2}dx = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C$$
$$= \boldsymbol{\log(x^2+2) + C}$$

xがどのような値でも $x^2+2>0$ であるから $\log|x^2+2| = \log(x^2+2)$

②　$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$であり，$\cos x = t$とおくと，$-\sin x\,dx = dt$より

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{-1}{t}dt = -\log|t| + C = \boldsymbol{-\log|\cos x| + C}$$

3　不定積分の部分積分法

(1)　次の不定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int xe^x\,dx$　　　②　$\displaystyle\int \log x\,dx$

(2)　不定積分$\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$を求めよ。

要　点

積の導関数の公式より　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

よって　$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$

これから，次の不定積分の部分積分法の公式が得られる。

$$\boldsymbol{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

(1)　①　$(x)' = 1$ であり，$e^x = (e^x)'$とみると　$\displaystyle\int xe^x\,dx = \int x\cdot(e^x)'\,dx = xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx$

②　$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$であり，$1 = (x)'$とみると　$\displaystyle\int \log x\,dx = \int \log x\cdot(x)'\,dx = x\log x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx$

〈注意〉部分積分法の公式　$\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$　を用いる場合，微分して簡単になる整式や対数関数を $f(x)$，積分しやすい三角関数や指数関数，あるいは整式を $g(x)$とするとよい。

(2)は，部分積分法の公式を 2 回用いれば不定積分ができる形になる。

解答

C は積分定数とする。

(1)　①　$\displaystyle\int xe^x\,dx = xe^x - \int (x)'\cdot e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = \boldsymbol{xe^x - e^x + C}$

②　$\displaystyle\int \log x\,dx = \int \log x\cdot(x)'\,dx = x\log x - \int(\log x)'\cdot x\,dx = x\log x - \int\frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$\displaystyle= x\log x - \int dx = \boldsymbol{x\log x - x + C}$

(2)　$\displaystyle\int x^2\sin x\,dx = \int x^2\cdot(-\cos x)'\,dx = -x^2\cos x - \int (x^2)'\cdot(-\cos x)\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$

$\displaystyle= -x^2\cos x + 2\int x(\sin x)'dx = -x^2\cos x + 2\left\{x\sin x - \int(x)'\cdot\sin x\,dx\right\}$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\cdot(-\cos x) + C = \boldsymbol{-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C}$

$\boxed{4}$　いろいろな関数の不定積分

(1)　次の不定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int\frac{x^2}{x+1}dx$　　　②　$\displaystyle\int\frac{2}{x^2-1}dx$

(2)　次の不定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int\cos^2 x\,dx$　　　②　$\displaystyle\int\sin^3 x\,dx$　　　③　$\displaystyle\int\sin 3x\cos 2x\,dx$

要　点

分数関数に関する不定積分

$\boxed{1}$では分母が単項式の分数関数，$\boxed{2}$では$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$の形になっている分数関数の不定積分を求めた。

ここでは，次のようにすると不定積分ができるものを考える。

(1)　①　分子の次数を下げる　　　②　部分分数に分解する

(1)　①　右の組立除法により，$x^2=(x+1)(x-1)+1$ であるから

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\int\frac{x^2}{x+1}dx = \int\frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}dx$$

$$= \int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

と変形でき，不定積分できるようになる。

②　$x^2-1=(x+1)(x-1)$から，恒等式$\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1}$を考え，これが成り立つ

定数 a，b を求める。

このように変形できれば，不定積分ができるようになる。

三角関数に関する不定積分

次のようにすると不定積分ができるものを考える。

(2)　①　次数を下げる　　②　三角関数の相互関係を利用する

③　三角関数の積和の公式を利用する

(2)　①　2 次の三角関数は，コサインの 2 倍角の公式を利用して，1 次の三角関数に変換できる。

$$\boldsymbol{\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}},\qquad \boldsymbol{\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

このように変形すると，不定積分ができるようになる。

②　三角関数の相互関係　$\boldsymbol{\sin^2 x=1-\cos^2 x}$　を用いると　$\sin^3 x=(1-\cos^2 x)\sin x$　と変形でき，

不定積分の置換積分法が利用できるようになる。

③　三角関数の積和の公式　$\boldsymbol{\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}}$　を利用すると，

不定積分ができるようになる。三角関数の積和の公式は，他に次のものがある。

$$\boldsymbol{\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}},\qquad \boldsymbol{\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}}$$

解答

C は積分定数とする。

(1)　①　$x^2=(x+1)(x-1)+1$ であるから

$$\int\frac{x^2}{x+1}dx=\int\frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}dx=\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{2}x^2-x+\log|x+1|+C}$$

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{1} \end{array}$$

②　$\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1}$ が恒等式となるa，bの値を求める。

$$(\text{右辺})=\frac{a(x-1)+b(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{(a+b)x+(-a+b)}{x^2-1}$$

よって　$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b=2 \end{cases}$

これを解いて　$a=-1$，$b=1$　　したがって　$\dfrac{2}{x^2-1}=-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$

これから　$\displaystyle\int\frac{2}{x^2-1}dx=\int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx=-\log|x+1|+\log|x-1|+C$

$$\boldsymbol{=\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C}$$

(2)　①　$\cos 2x=2\cos^2 x-1$ であるから　$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

よって　$\displaystyle\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\boldsymbol{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C}$

② $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ より $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

ここで，cos$x$＝t とおくと－sin$x$$dx$＝$dt$ であるから

$$\int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \int (1-t^2)\cdot(-dt) = \int (t^2-1)\,dt = \frac{1}{3}t^3 - t + C = \boldsymbol{\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C}$$

③ 三角関数の積和の公式 $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$より

$$\int \sin 3x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int\{\sin(3x+2x)+\sin(3x-2x)\}\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 5x+\sin x)\,dx$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C}$$

5 定積分

(1) 次の定積分を求めよ。

① $\displaystyle\int_1^3 x^2\,dx$　② $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$　③ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$　④ $\displaystyle\int_0^2 e^x\,dx$

(2) 次の定積分を求めよ。

① $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,dx$　② $\displaystyle\int_3^7 \frac{1}{x^2-4}\,dx$　③ $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$　④ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\cos 3x\,dx$

要　点

定積分

関数 $f(x)$の原始関数の 1 つを $F(x)$とするとき，2 つの実数 a，b に対して，$F(b)-F(a)$を関数 $f(x)$の

aからbまでの **定積分** といい，$\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx}$ と表す。また，$F(b)-F(a)$を $\Big[\boldsymbol{F(x)}\Big]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}$ と表す。

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$において，$a$を **下端**，$b$を **上端** といい，この定積分を求めることを，関数$f(x)$を **a から b まで積分する** という。

以上をまとめると，$F'(x) = f(x)$のとき $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx} = \Big[\boldsymbol{F(x)}\Big]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{F(b)-F(a)}$

〈注意〉$f(x)$の不定積分は$F(x)+C$であるが，定積分$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$の値は次のように積分定数$C$によらず定まる。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)+C\Big]_a^b = \{F(b)+C\} - \{F(a)+C\} = F(b)-F(a)$$

〈注意〉$a \leqq b$ のとき，区間 $a \leqq x \leqq b$ を **積分区間** とよぶこともある。

(1)　「$\boxed{1}$　**不定積分**」で学習した，**x^n の不定積分，三角関数の不定積分，指数関数の不定積分の公式**を利用する。

定積分の性質

k，l を定数とする。

・$\displaystyle \int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

・$\displaystyle \int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$　　・$\displaystyle \int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

・$\displaystyle \int_a^b \{kf(x)+lg(x)\}\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + l\int_a^b g(x)\,dx$

〈注意〉定積分 $\displaystyle \int_a^b f(x)\,dx$ の計算は，a，b の大小に関わらず行うことができる。

また，次のような性質もある。

・$\displaystyle \int_a^a f(x)\,dx = 0$　（… 上端と下端が同じなら，定積分の値は 0）

・$\displaystyle \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$　（… 上端と下端を変換する公式）

・$\displaystyle \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

（… $\boxed{\text{左辺から右辺}}$　上端と下端以外の値で定積分を分割する公式
　　$\boxed{\text{右辺から左辺}}$　一方の上端と他方の下端が同じで，被積分関数が同じ定積分を 1 つにまとめる公式）

(2)　①　絶対値をはずすために，積分区間を分ける。
　　②～④　「$\boxed{4}$　**いろいろな関数の不定積分**」で学習した考え方を利用する。

解答

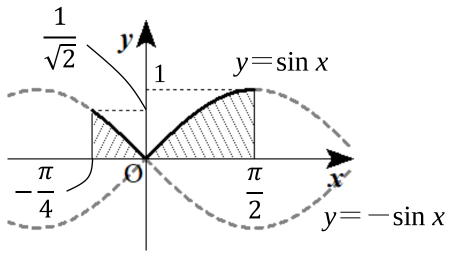
(1)　①　$\displaystyle \int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 = \boldsymbol{\frac{26}{3}}$

②　$\displaystyle \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log|x|\Big]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \mathbf{log\,2}$

③　$\displaystyle \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = \mathbf{1}$

④　$\displaystyle \int_0^2 e^x\,dx = \Big[e^x\Big]_0^2 = e^2 - e^0 = \boldsymbol{e^2 - 1}$

(2)　①　$-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq 0$ のとき，$\sin x \leqq 0$ であるから



$|\sin x| = -\sin x$

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x \geqq 0$ であるから

$|\sin x| = \sin x$

よって　$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\, dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (-\sin x)\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \Big[\cos x\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} + \Big[-\cos x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \{0 - (-1)\} = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{4-\sqrt{2}}{2}}$

②　$\frac{1}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-2}$ が恒等式となる a，b の値を求める。

$(\text{右辺}) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2) + b(x+2)}{x^2-4} = \frac{(a+b)x - 2a + 2b}{x^2-4}$

よって　$\begin{cases} a + b = 0 \\ -2a + 2b = 1 \end{cases}$　これを解いて　$a = -\frac{1}{4}$，$b = \frac{1}{4}$

したがって　$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)$

これから　$\int_3^7 \frac{1}{x^2-4}\, dx = \frac{1}{4}\int_3^7 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \frac{1}{4}\Big[\log|x-2|\Big]_3^7 - \frac{1}{4}\Big[\log|x+2|\Big]_3^7$

$= \frac{1}{4}(\log 5 - \log 1) - \frac{1}{4}(\log 9 - \log 5) = \frac{1}{4}(\log 5 - 2\log 3 + \log 5)$

$= \frac{1}{2}(\log 5 - \log 3) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{5}{3}}$

③　$\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\Big[x\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2}(\pi - 0) - \frac{1}{2}(0 - 0) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ より $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

④　$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 7x + \cos x)\, dx$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}\sin 7x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right) = \frac{7-1}{14} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{14}}$

6　定積分の置換積分法・部分積分法

(1)　次の定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x-2)^3}dx$　　②　$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}dx$

(2)　次の定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$　　②　$\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$　を求めよ。

(4)　次の定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin x\ dx$　　②　$\displaystyle\int_{-2}^{2} x(x-1)^2\,dx$

(5)　次の定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\ dx$　　②　$\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$

要　点

定積分の置換積分法

(1)　「2　**不定積分の置換積分法**」で学習した，次の公式を用いる。

1　$\boldsymbol{\displaystyle\int f(x)\,dx=\int f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt}$　　ただし　$\boldsymbol{x=g(t)}$

……$x=g(t)$とおけば積分可能，あるいはより簡単に積分ができるようになるものに用いる。

2　$\boldsymbol{\displaystyle\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx=\int f(x)\,dx}$　　ただし　$\boldsymbol{g(x)=t}$

……被積分関数が $f(g(x))g'(x)$の形になっているときに用いる。

定積分の置換積分法では，不定積分の公式に加えて積分区間の変更も考慮する必要がある。

例えば，$x=g(t)$とおいたとき，x が a から b まで変化するとき，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ならば t は α から β まで変化し，定積分は次のようになる。

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt$$

x	$a \longrightarrow b$
t	$\alpha \longrightarrow \beta$

(2)　$\sqrt{a^2-x^2}$，$\dfrac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}$ $\big(a$，bは正の定数$\big)$

という形の被積分関数の不定積分は，高校数学の範囲では求められない。

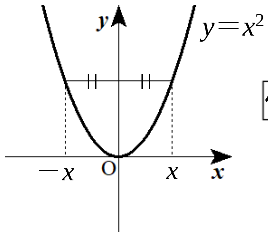
しかし，特定の積分区間をもつ定積分については，置換積分法でその値を求めることができる。

①　$\sqrt{a^2-x^2}$の定積分では，$x=a\sin\theta$ と置き換える。

②　$\dfrac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}$ の定積分では，$x=b\sin\theta$ と置き換える。

(3)　$\dfrac{1}{a^2+x^2}$ (aは正の定数) の定積分では，$x=a\tan\theta$ と置き換えると，その値が求められる。

(4)　偶関数・奇関数の定積分



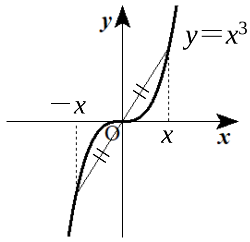
偶関数

$f(x)=x^2$ のように

$f(-x)=f(x)$

が成り立つ関数を **偶関数** という。

偶関数のグラフは，y 軸に関して対称である。



奇関数

$f(x)=x^3$ のように

$f(-x)=-f(x)$

が成り立つ関数を **奇関数** という。

奇関数のグラフは，原点に関して対称である。

偶関数，奇関数の定積分について，次のことが成り立つ。

・$f(x)$が偶関数のとき　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$　　**・$f(x)$が奇関数のとき　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$**

〈注意〉積分区間が$-a$ から a であり，被積分関数が偶関数または奇関数のとき，上の公式を用いると計算量がぐっと減るので，この公式が使えるときは積極的に使うようにしたい。

証明　「5　**定積分**」で学習した性質を用いると，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ は次のように変形できる。

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad\cdots\cdots①$$

x	$-a$	$\longrightarrow$ 0
t	a	$\longrightarrow$ 0

ここで$\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$は，$x=-t$とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=-1$ であるから

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=\int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)dt=\int_{0}^{a} f(-t)\,dt=\int_{0}^{a} f(-x)\,dx$$

3 式目から 4 式目は
t を x に置き換えただけ。

よって，①から　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{0}^{a} f(-x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=\int_{0}^{a}\{f(-x)+f(x)\}\,dx$

$f(x)$が偶関数のとき，$f(-x)=f(x)$であるから　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{0}^{a}\{f(x)+f(x)\}\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$f(x)$が奇関数のとき，$f(-x)=-f(x)$であるから　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{0}^{a}\{-f(x)+f(x)\}\,dx=0$

定積分の部分積分法

(5)　「3　**不定積分の部分積分法**」で学習した公式　$\displaystyle\boldsymbol{\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx}$

から，次の定積分の公式が得られる。

$$\boldsymbol{\int_{a}^{b} f(x)g'(x)\,dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_{a}^{b}-\int_{a}^{b} f'(x)g(x)\,dx}$$

解答

(1)　①　$x-2=t$ とおくと　$x=t+2$，$dx=dt$

また，x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$-2 \longrightarrow -1$

よって　$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x-2)^3}dx=\int_{-2}^{-1}\frac{t+2}{t^3}dt=\int_{-2}^{-1}(t^{-2}+2t^{-3})\,dt$

$$=\left[\frac{1}{-2+1}t^{-2+1}+2\cdot\frac{1}{-3+1}t^{-3+1}\right]_{-2}^{-1}=\left[-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right]_{-2}^{-1}=(1-1)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=-\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

②　$\sin x=t$ とおくと　$\cos x dx=dt$

また，x と t の対応は右のようになる。

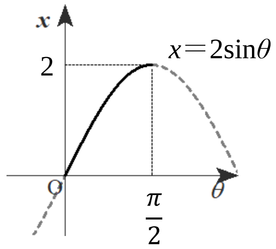
x	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow 1$

よって　$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{1}{t}dt=\Big[\log|\,t\,|\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}=0-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$

(2)　①　$x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta d\theta$

また，x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 2$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$



$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\theta\geqq 0$ であるから

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2\theta}=2\sqrt{1-\sin^2\theta}=2|\cos\theta\,|=2\cos\theta$

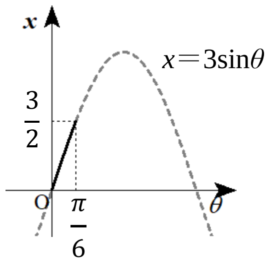
よって　$\displaystyle\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-2(0+0)=\boldsymbol{\pi}$$

②　$x=3\sin\theta$ とおくと　$dx=3\cos\theta d\theta$

また，x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \frac{3}{2}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$



$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\cos\theta\geqq 0$ であるから

$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2\theta}=3\sqrt{1-\sin^2\theta}$

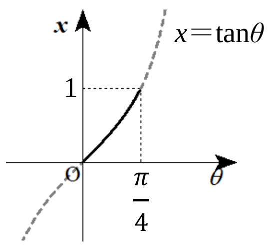
$\quad=3|\cos\theta\,|=3\cos\theta$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3\cos\theta}\cdot 3\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

(3)　$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

また，x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$



$x^2+1=\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であるから

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

(4) ① $f(x)=x^2\sin x$ は，$f(-x)=(-x)^2\cdot\sin(-x)=-x^2\sin x=-f(x)$であるから，奇関数である。

よって $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x\,dx = \mathbf{0}$

② $x(x-1)^2=x(x^2-2x+1)=x^3-2x^2+x$ であり，x^3，x は奇関数，$-2x^2$ は偶関数である。

よって $\displaystyle\int_{-2}^{2} x(x-1)^2\,dx = \int_{-2}^{2}(x^3-2x^2+x)\,dx = \int_{-2}^{2}x^3\,dx - 2\int_{-2}^{2}x^2\,dx + \int_{-2}^{2}x\,dx$

$$= 0 - 4\int_0^2 x^2\,dx + 0 = -4\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = -\mathbf{\frac{32}{3}}$$

(5) ① 定積分の部分積分法の公式において，$f(x)=x$，$g'(x)=\cos x$ と考えれば，右辺の被積分関数が $f'(x)g(x)=(x)'\cdot\sin x=\sin x$ となり，積分が可能な形となる。

よって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot(\sin x)'\,dx = \Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x)'\cdot\sin x\,dx = \frac{\pi}{2} - 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$$= \frac{\pi}{2} - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \{0-(-1)\} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}-1}$$

② $f(x)=\log x$，$g'(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ と考えれば，右辺の被積分関数が $f'(x)g(x)=(\log x)'\cdot\dfrac{1}{2}x^2=\dfrac{1}{2}x$

となり，積分が可能な形となる。

よって $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx = \int_1^2\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\cdot\log x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^2 - \int_1^2\frac{1}{2}x^2\cdot(\log x)'\,dx$

$$= 2\log 2 - 0 - \int_1^2\frac{1}{2}x\,dx = 2\log 2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 2\log 2 - \left(1-\frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{2\log 2 - \frac{3}{4}}$$

7 定積分で表された関数

(1) 次の関数を x で微分せよ。

① $y=\displaystyle\int_1^x t^3e^{t^2}\,dt$　　② $y=\displaystyle\int_0^x (x-t)e^t\,dt$

(2) 等式 $f(x)=\cos x+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\sin t\,dt$ を満たす関数$f(x)$を求めよ。

要 点

aを定数とし，関数$f(x)$の原始関数の 1 つを$F(x)$とする。このとき，定積分$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$は$F(x)-F(a)$より

xの関数である。この関数をxについて微分すると $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\} = F'(x)-0 = f(x)$

したがって，次の等式が成り立つ。 $\boldsymbol{\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}$ 　ただし，aは定数

(1)　②　積分変数は t であるから，x は定数として扱う。

すなわち，$\displaystyle\int_0^x (x-t)e^t\,dt=\int_0^x xe^t\,dt-\int_0^x te^t\,dt=x\int_0^x e^t\,dt-\int_0^x te^t\,dt$

と変形して，x で微分する。

(2)　・$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\sin t\,dt$ は定数であるから，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\sin t\,dt=k$ とおける。

・$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\sin t\,dt=k$ とおくと，関数 $f(x)$ は $f(x)=\cos x+k$ と表すことができる。

・$f(x)=\cos x+k$ の x を t に置き換えると　$f(t)=\cos t+k$

・これを $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\sin t\,dt=k$ に代入すると　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t+k)\sin t\,dt=k$

・$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t+k)\sin t\,dt=k$ は k の方程式であるから，k の値が求まる。

・k の値が求まれば，$f(x)=\cos x+k$ より関数 $f(x)$ が求まる。

解答

(1)　①　$\displaystyle\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\int_1^x t^3e^{t^2}\,dt=\boldsymbol{x^3e^{x^2}}$

②　$\displaystyle\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)e^t\,dt=\frac{d}{dx}\int_0^x xe^t\,dt-\frac{d}{dx}\int_0^x te^t\,dt=\frac{d}{dx}\left(x\int_0^x e^t\,dt\right)-xe^x$

$$=(x)'\int_0^x e^t\,dt+x\cdot\frac{d}{dx}\int_0^x e^t\,dt-xe^x=\Big[e^t\Big]_0^x+x\cdot e^x-xe^x=\boldsymbol{e^x-1}$$

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\sin t\,dt$ は定数であるから，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\sin t\,dt=k$ とおく。このとき，関数 $f(x)$ は

$f(x)=\cos x+k$ と表せる。ここで，$f(t)=\cos t+k$ であるから $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\sin t\,dt=k$ の左辺に

代入すると　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\sin t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t+k)\sin t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos t\sin t\,dt+k\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t\,dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\sin 2t\,dt+k\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\left[-\frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+k\left\{-\frac{1}{2}-(-1)\right\}$$

$$=\left\{-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}+\frac{1}{2}k=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}k$$

よって　$\displaystyle\frac{3}{8}+\frac{1}{2}k=k$　　これを解いて　$k=\dfrac{3}{4}$　　したがって　$\boldsymbol{f(x)=\cos x+\dfrac{3}{4}}$

8　定積分と区分求積法

次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$　　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\{(1-n)^2+(2-n)^2+\cdots\cdots+(n-n)^2\}$

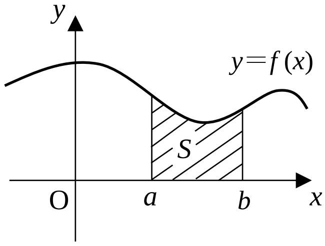
要　点

区分求積法

数列の和の極限を，ある図形の面積と見なし，定積分を用いて求める方法。

右の図形の面積 S は

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

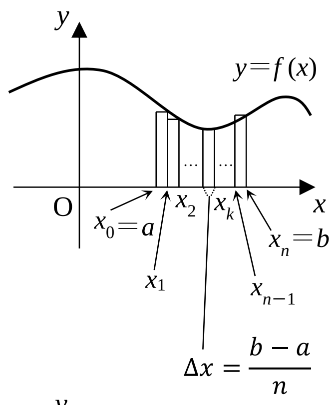


である。

一方，区間［a，b］の横幅を

n 等分した各長方形の面積の

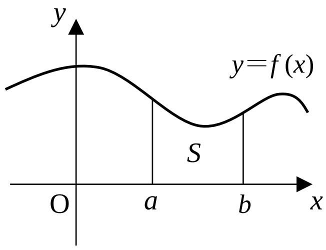
和を考えると



$$f(x_1)\cdot\Delta x+\cdots\cdots+f(x_k)\cdot\Delta x+\cdots\cdots+f(x_n)\cdot\Delta x=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

ここで，n を限りなく大きくすると

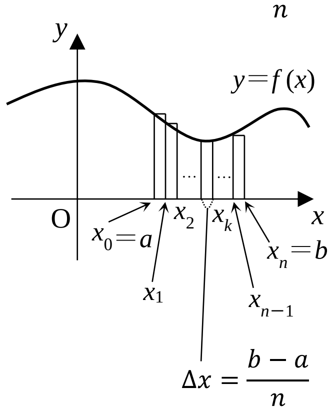
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=S$$



と見なせる。すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx$$

ここで，各長方形の和を



$$f(x_0)\Delta x+\cdots\cdots+f(x_{k-1})\Delta x+\cdots\cdots+f(x_{n-1})\Delta x$$

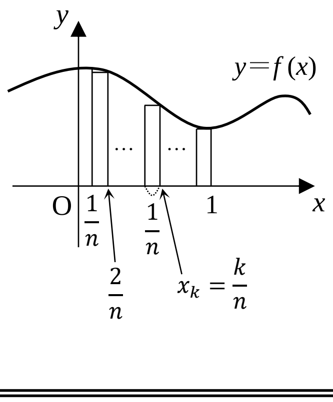
と考えても，$n\longrightarrow\infty$のとき S と一致すると見なせる。

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx$$

特に$a=0$，$b=1$ のとき，$\Delta x=\dfrac{1}{n}$であり，$x_k=\dfrac{k}{n}$であるから

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx$$

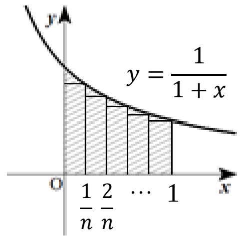


すなわち　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx}$

〈注意〉この等式は，$f(x)$が負の値をとるとき，x軸より下側の長方形の面積を$f(x)\times\Delta x$(この値は負)と考えれば，同様に成り立つ。

解答

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$



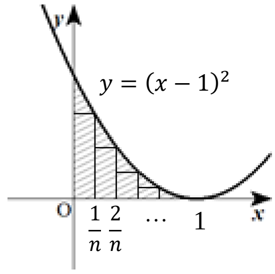
ここで，$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$とおくと，

求める極限値は右の図の面積と見なせるので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log|\,1+x\,|\Big]_0^1=\mathbf{\log 2}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\{(1-n)^2+(2-n)^2+\cdots\cdots+(n-n)^2\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}(k-n)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}-1\right)^2$

ここで，$f(x)=(x-1)^2$とおくと，求める極限値は右の図の面積と見なせるので



$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1(x-1)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1=0-\left(-\frac{1}{3}\right)=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

$\boxed{\text{別解}}$ $\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-n)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2-2kn+n^2)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n^3\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right\}=\frac{1}{3}$$

9 定積分と不等式

$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$1+x^2\leqq 1+x$を示せ。また，このことを利用して，$\log 2<\dfrac{\pi}{4}$を示せ。

要　点

8の区分求積法により，関数$f(x)$が区間$[a,\ b]$でつねに$f(x)\geqq 0$ならば，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\geqq 0$となる。

ただし，等号が成り立つのは，つねに$f(x)=0$のときに限る。

また，区間$[a,\ b]$で$f(x)\geqq g(x)$のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\geqq\int_a^b g(x)\,dx$

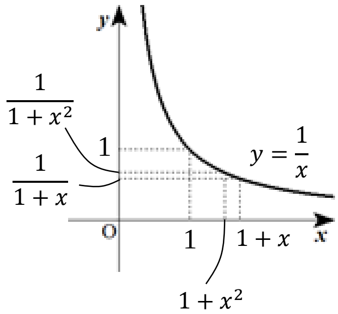
等号が成り立つのは，つねに$f(x)=g(x)$のときに限る。

証明

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，辺々に x を掛けると　$0 \leqq x^2 \leqq x$

よって，$x^2 \leqq x$ の両辺に 1 を足すと　$1+x^2 \leqq 1+x$

等号が成り立つのは $x=0$，1 のときである。



このことから　$\frac{1}{1+x^2} \geqq \frac{1}{1+x}$　　よって　$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \geqq \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$

ここで，$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+x}$ となるのは $x=0$，1 のときに限るので

つねに $\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+x}$ ではない。したがって　$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx > \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$

$\left[\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx\right.$ の値を求める$\left.\right]$

$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

また，x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$1+x^2=1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ であるから　$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

$\left[\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx\right.$ の値を求める$\left.\right]$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1=\log 2$$

以上から　$\frac{\pi}{4}>\log 2$　　すなわち　$\log 2<\frac{\pi}{4}$

１０　面積

(1)　曲線 $y=\frac{x}{x^2+1}$ と直線 $y=\frac{1}{2}x$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(2)　曲線 $y=\log x$ と y 軸，および 2 直線 $y=1$，$y=2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

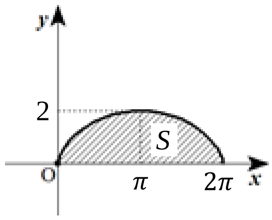
(3)　楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(4)　サイクロイド

$x=\theta-\sin\theta$,

$y=1-\cos\theta$

の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

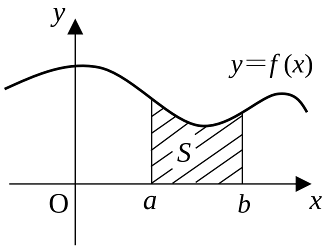


要　点

面積

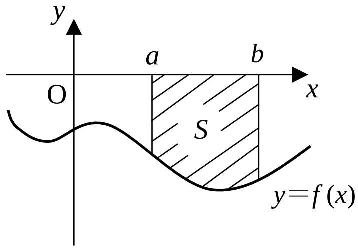
曲線 $y=f(x)$と x 軸，および
2 直線 $x=a$，$x=b$　(ただし　$a<b$)
で囲まれた図形の面積 S は，
区間[a，b]において
つねに $f(x) \geqq 0$ のとき

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$



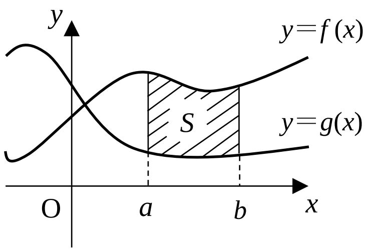
つねに $f(x) \leqq 0$ のとき

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx$$



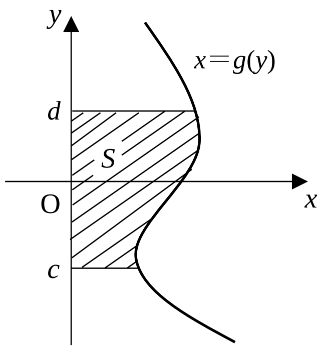
2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$と，
2 直線 $x=a$，$x=b$　(ただし　$a<b$)
で囲まれた図形の面積 S は，
区間[a，b]において
つねに $f(x) \geqq g(x)$のとき

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$



曲線 $x=g(y)$と y 軸，および
2 直線 $y=c$，$y=d$　(ただし　$c<d$)
で囲まれた図形の面積 S は，
$c \leqq y \leqq d$ でつねに $g(y) \geqq 0$ のとき

$$S=\int_c^d g(y)\,dy$$



(1)　曲線と直線の交点を求め，各区間における大小関係を調べる。

(3)　x に $-x$ を代入しても，y に $-y$ を代入しても方程式は不変であるため，この楕円は x 軸，y 軸に関して対称である。よって，第 1 象限（$x \geqq 0$，$y \geqq 0$）における楕円の方程式を $y=f(x)$の形で表し，面積を求め，4 倍すればよい。

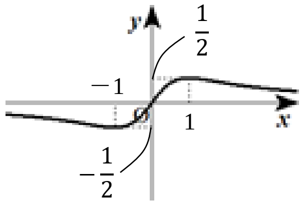
(4)　図から，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき $0 \leqq x \leqq 2\pi$ であることがわかるので，求める面積Sは　$S=\displaystyle\int_0^{2\pi} y\,dx$ である。これを，置換積分法を用いて求める。

解答

(1)　曲線$y=\dfrac{x}{x^2+1}$は，$y'=\dfrac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

より，増減表，グラフの概形は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘



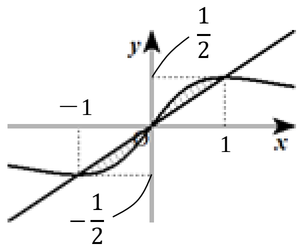
$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty} y=0$

また，曲線と直線の交点の x 座標は

$$\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}x \qquad x=\frac{1}{2}x(x^2+1) \qquad x(x^2+1)-2x=0$$

$$x(x^2-1)=0 \qquad x(x-1)(x+1)=0 \qquad x=-1,\ 0,\ 1$$

よって，曲線と直線で囲まれた図形は右の図のようになる。



$-1\leqq x\leqq 0$ のとき　$\dfrac{1}{2}x\geqq\dfrac{x}{x^2+1}$，　$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$\dfrac{x}{x^2+1}\geqq\dfrac{1}{2}x$

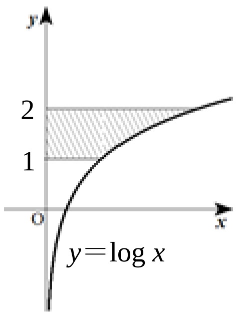
であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2}x\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\log|x^2+1|\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}\log|x^2+1|-\frac{1}{4}x^2\right]_{0}^{1}=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log 2\right)+\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{4}=\boldsymbol{\log 2-\frac{1}{2}}$$

(2)　$y=\log x$ を x について解くと　$x=e^y$

よって，求める面積 S は

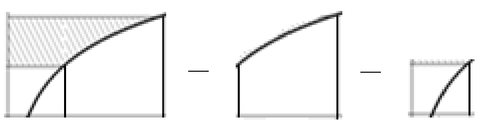


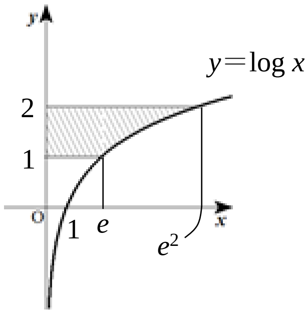
$$S=\int_{1}^{2}e^y\,dy=\Big[e^y\Big]_{1}^{2}=\boldsymbol{e^2-e}$$

$\boxed{\text{別解}}$　$y=\log x$ において，$y=1$ のとき $x=e$，$y=2$ のとき $x=e^2$

であるから，面積 S は

$$S=e^2\times 2-\int_{e}^{e^2}\log x\,dx-e\times 1$$



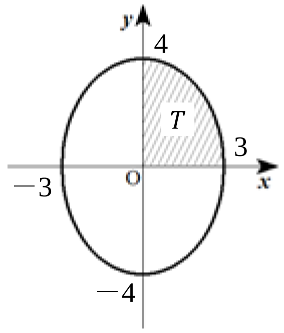


$$=2e^2-\Big[x\log x-x\Big]_{e}^{e^2}-e$$

$$=2e^2-\{(2e^2-e^2)-(e-e)\}-e=e^2-e$$

(3)　楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$ は，x軸，y軸に関して対称であるから，

$x≧0$，$y≧0$ の部分の面積 T を求めれば，$S=4T$ より面積 S が求まる。



$\dfrac{y^2}{16}=1-\dfrac{x^2}{9}$ より　$y^2=16-\dfrac{16}{9}x^2$

よって　$y=\sqrt{16-\dfrac{16}{9}x^2}=\dfrac{4}{3}\sqrt{9-x^2}$

$T=\displaystyle\int_0^3\frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ より，$x=3\sin\theta$ とおくと　$dx=3\cos\theta\,d\theta$

また，x と θ の対応は右のようになる。 $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2\theta}=3\cos\theta$ であるから

x	$0\ \longrightarrow\ 3$
θ	$0\ \longrightarrow\ \dfrac{\pi}{2}$

$$T=\int_0^3\frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{3}\cdot 3\cos\theta\cdot 3\cos\theta\,d\theta$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\Big[6\theta+3\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=3\pi$$

したがって　$S=4T=4\cdot 3\pi=\boldsymbol{12\pi}$

(4)　図より，求める面積Sは　$S=\displaystyle\int_0^{2\pi}y\,dx$ であり，$\dfrac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$ より，

$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ において $\dfrac{dx}{d\theta}\geqq 0$ であるから，xとθの対応は右のようになる。

x	$0\ \longrightarrow\ 2\pi$
θ	$0\ \longrightarrow\ 2\pi$

また，$y=1-\cos\theta$，$dx=(1-\cos\theta)d\theta$ であるから

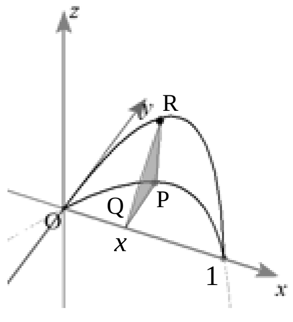
$$S=\int_0^{2\pi}y\,dx=\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\cdot(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\left[\theta-2\sin\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=2\pi+\pi=\boldsymbol{3\pi}$$

１１　体積

(1)　xy 平面に曲線 $y=x(1-x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ があり，この曲線上の点 P(x，$x(1-x)$) から x 軸に垂線 PQ を引く。ここで，PQ＝PR，　PQ⊥PR となり，z 座標が正となる点 R を x 軸に垂直な平面上にとり，直角二等辺三角形 PQR を考える。点 Q が x 軸上を原点 O から点(1，0)まで動くとき，この直角二等辺三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ。



(2)　次の図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

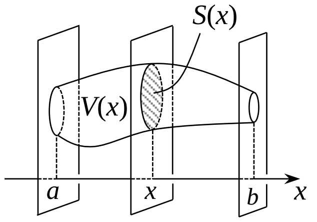
①　曲線 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形

②　円 $x^2+(y-2)^2=1$ で囲まれた図形

要　点

体積

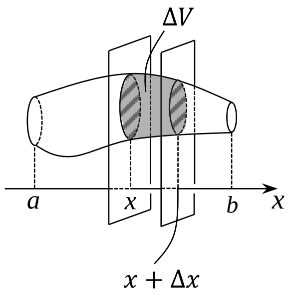
空間に立体があるとき，1 つの直線を x 軸とし，
x 座標が x である点で x 軸と垂直に交わる平面に
よる立体の切り口の面積を $S(x)$とする。
また，$a\leqq x\leqq b$ のとき，x 座標が a，x である 2 点
でそれぞれ x 軸と垂直に交わる 2 平面を考え，
その間にある立体の体積を $V(x)$とする。



xの増分Δxに対する$V(x)$の増分は

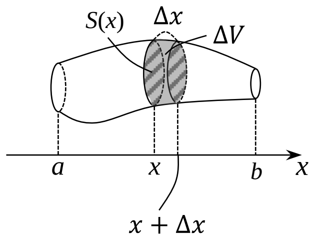
$$\Delta V=V(x+\Delta x)-V(x)$$

であり，ΔVは，x座標がx，$x+\Delta x$である 2 点で
それぞれ x 軸と垂直に交わる 2 平面の間にある
部分の体積である。



Δxが小さいとき，ΔVは，底面積$S(x)$，高さΔxの
立体の体積$S(x)\Delta x$にほぼ等しい。

ここで，Δxを限りなく 0 に近づけると，$\dfrac{\Delta V}{\Delta x}$は
$S(x)$に限りなく近づくから



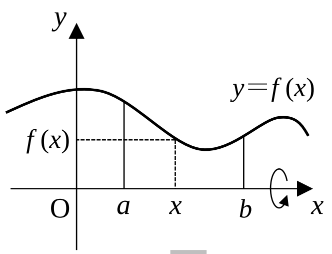
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=S(x)\qquad \text{すなわち}\quad V'(x)=S(x)$$

よって，$V(x)$は $S(x)$の原始関数である。
区間$[a,\ b]$における立体の体積を V とすると，$V(x)$の定義により，$V(a)=0$，$V(b)=V$ であるから

$$V=V(b)-V(a)=\int_a^b S(x)\,dx$$

以上より，x 座標が区間$[a,\ b]$内の x である点で x 軸と垂直に交わる平面による立体の切り口が $S(x)$のとき，区間$[a,\ b]$における立体の体積 V は

$$\boldsymbol{V=\int_a^b S(x)\,dx}$$

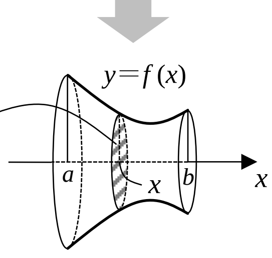


回転体の体積（x 軸のまわりを回転）

曲線 $y=f(x)$と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$　(ただし　$a<b$)
で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転
してできる回転体の体積 V は

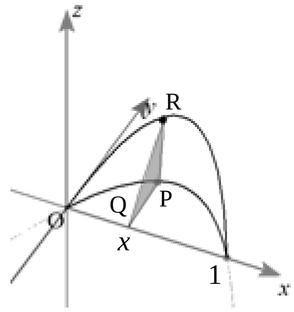
$$\boldsymbol{V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx}$$

立体の切り口の
面積 $S(x)$は
$S(x)=\pi\{f(x)\}^2$



解答

(1)　直角二等辺三角形 PQR の面積を $S(x)$とすると



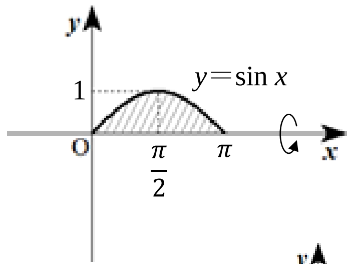
$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\{x(1-x)\}^2=\frac{1}{2}x^2(1-x)^2$$

よって，求める立体の体積 V は

$$V=\int_0^1 S(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{2}x^2(1-x)^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-2x+x^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(x^4-2x^3+x^2)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6-15+10}{30}=\boldsymbol{\frac{1}{60}}$$

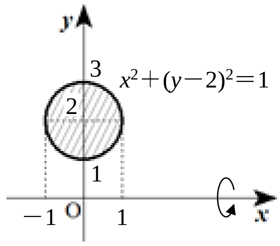
(2)　①　$V=\pi\int_0^\pi y^2\,dx=\pi\int_0^\pi\sin^2 x\,dx$



$$=\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}}$$

②　$x^2+(y-2)^2=1$ より

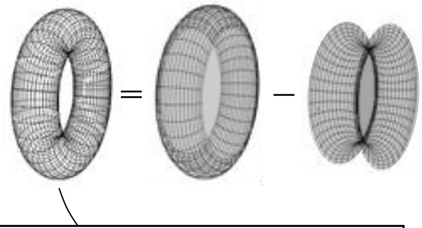


$$y-2=\pm\sqrt{1-x^2}$$

すなわち

$$y=2\pm\sqrt{1-x^2}$$

ここで　$y=2+\sqrt{1-x^2}$は与えられた円の上半分の半円であり，$y=2-\sqrt{1-x^2}$は下半分の半円である。



求める立体は，ドーナツのような形

よって，求める立体の体積 V は半円$y=2+\sqrt{1-x^2}$とx軸，および 2 直線 $x=-1$，$x=1$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体 V_1 から，半円$y=2-\sqrt{1-x^2}$とx軸，および 2 直線 $x=-1$，$x=1$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体 V_2 を引いたものであるから

$$V=V_1-V_2=\pi\int_{-1}^1\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx-\pi\int_{-1}^1\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_{-1}^1\left\{\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right\}dx=\pi\int_{-1}^1 4\cdot 2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=16\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

ここで，$x=\sin\theta$ とおくと　$dx=\cos\theta d\theta$

また，x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$のとき，$\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$$

したがって　$16\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$

$$=8\pi\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{4\pi^2}$$

１２　**曲線の長さ**

次の曲線の長さ L を求めよ。

(1)　アステロイド $x=\cos^3\theta$，　$y=\sin^3\theta$　$\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

(2)　曲線$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$　$(-1\leqq x\leqq1)$

要　点

曲線の長さ

曲線の方程式が，t の媒介変数として

$x=f(t)$,　　$y=g(t)$　$(\alpha\leqq t\leqq\beta)$

で与えられ，$f(t)$，$g(t)$の導関数がともに連続で，この曲線の長さを L とする。

曲線上の始点を $A(f(\alpha),\ g(\alpha))$，終点を $B(f(\beta),\ g(\beta))$とし，曲線上における点 A から点 $P(f(t),\ g(t))$までの長さは t の関数と考えられるから，これを $s(t)$で表す。

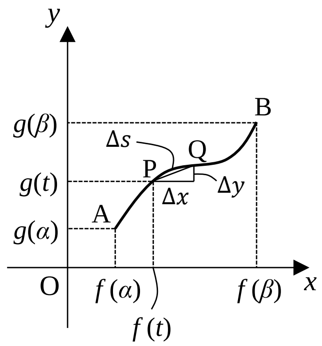
また，t の増分Δt に対する x，y，$s(t)$の増分をそれぞれ

Δx，Δy，Δs

で表すと，$|\Delta t|$が十分小さいとき，右の図の曲線 PQ と直線 PQ はほぼ一致すると考えてよいから，次の式が成り立つ。

$|\Delta s|\fallingdotseq\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$s(t)$はつねに増加するから，Δs とΔt は同符号である。



よって　$\frac{\Delta s}{\Delta t}\fallingdotseq\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$

ここで，$\Delta t\to0$ とすると　$\frac{d}{dt}s(t)=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

したがって，$s(t)$はこの式の右辺の原始関数であり　$\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=s(\beta)-s(\alpha)$

$s(\alpha)=0$，$s(\beta)=L$であるから　$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

以上から，次の公式が得られる。

曲線 $x=f(t)$，　$y=g(t)$　$(\alpha \leqq t \leqq \beta)$の長さ L は

$$\boldsymbol{L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt}$$

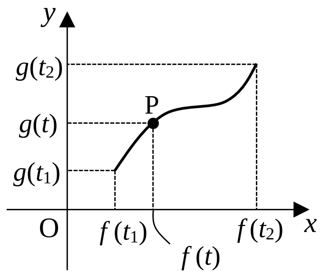
〈注意〉動点 P の道のりも同様に求めることができる。すなわち，座標平面上を運動する点 P の座標$(x,\ y)$が，時刻 t の関数として

$x=f(t)$，　$y=g(t)$

で表されているとする。

時刻 $t=t_1$ から $t=t_2$ までに点 P が動いた道のり s は

$$\boldsymbol{s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt}$$



$y=f(x)$　$(a \leqq x \leqq b)$で表された曲線の長さ

曲線の方程式が $y=f(x)$　$(a \leqq x \leqq b)$で与えられている場合には　　$x=t$，　$y=f(t)$　$(a \leqq t \leqq b)$

と考えると，　$\dfrac{dx}{dt}=1$，　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$

であるから，曲線$y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$の長さをLとすると　$\boldsymbol{L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx}$

解答

(1)　$\dfrac{dx}{d\theta}=3\cos^2\theta\,(\cos\theta)'=-3\sin\theta\cos^2\theta$，　$\dfrac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\,(\sin\theta)'=3\sin^2\theta\cos\theta$　であるから

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{(-3\sin\theta\cos^2\theta)^2+(3\sin^2\theta\cos\theta)^2}=\sqrt{9\sin^2\theta\cos^4\theta+9\sin^4\theta\cos^2\theta}$$

$$=|3\sin\theta\cos\theta|\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=|3\sin\theta\cos\theta|$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$より　$3\sin\theta\cos\theta \geqq 0$　　よって　$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2}=3\sin\theta\cos\theta$

したがって　$L=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta\,d\theta=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{4}\{1-(-1)\}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

(2)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$であるから

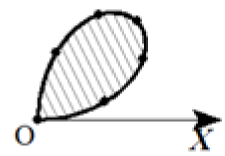
$$L=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right\}^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2x}}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(e^x+e^{-x})\,dx=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\{(e-e^{-1})-(e^{-1}-e)\}=e-e^{-1}=\boldsymbol{e-\frac{1}{e}}$$

研究　**極方程式で表された曲線と面積，バウムクーヘン積分**

(1)　極方程式$r=\sin 2\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線上の点と

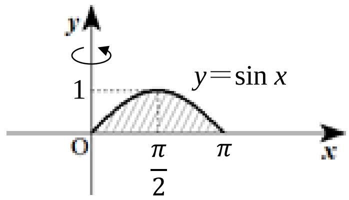
極 O を結んだ線分が通過する領域の面積 S を求めよ。



θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

(2)　関数 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形を

y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。



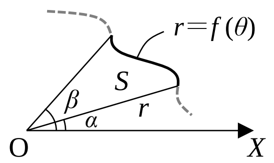
要　点

極方程式で表された曲線と面積

極方程式 $r=f(\theta)$ $(\alpha\leqq\theta\leqq\beta)$ で表される

曲線上の点と極 O を結んだ線分が通過

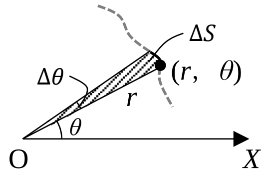
する領域の面積 S は



$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2\,d\theta}$$

上の公式は，次のように考えることができる。

右の図のように θ の増分$\Delta\theta$ に対する S の増分をΔS とすると，



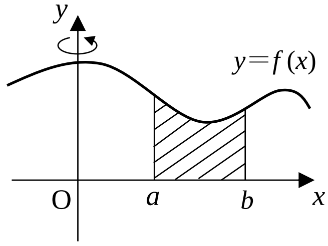
ΔSを扇形とみなして　$\Delta S\fallingdotseq\dfrac{1}{2}r^2\Delta\theta$

よって　$\dfrac{\Delta S}{\Delta\theta}\fallingdotseq\dfrac{1}{2}r^2$　　　$\Delta\theta\to 0$ のとき　$S'=\displaystyle\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta\theta}=\frac{1}{2}r^2$

したがって　$S=\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2\,d\theta$

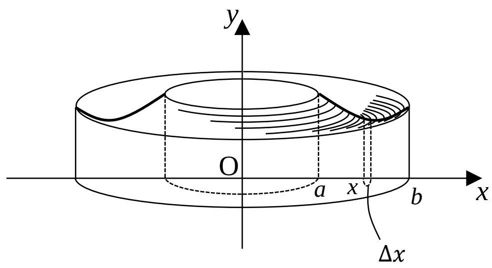
バウムクーヘン積分

$a>0$ とする。区間$[a,\ b]$で $f(x) \geqq 0$ であるとき，
曲線 $y=f(x)$，x 軸，直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた
図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の
体積 V は



$$\boldsymbol{V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx}$$

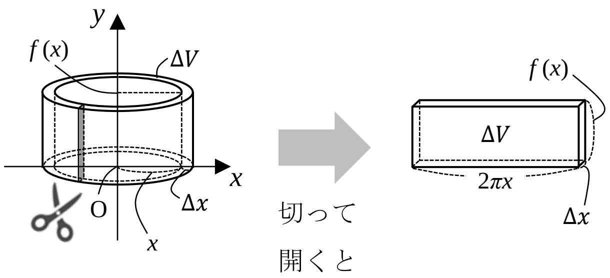
上の公式は，次のように考えることができる。
右の図のように，y 軸のまわりに 1 回転してできる
立体を，うすい“パイプ”に分割することを考える。
xの増分Δxに対するVの増分をΔVとする。
パイプ状の立体の体積ΔVを，切って開いた
板状の直方体の体積とみなして



$$\Delta V \fallingdotseq 2\pi x f(x)\Delta x$$

よって　$\dfrac{\Delta V}{\Delta x} \fallingdotseq 2\pi x f(x)$

$\Delta x \to 0$ のとき　$V' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta V}{\Delta x} = 2\pi x f(x)$



したがって　$V=\displaystyle\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$

解答

(1)　$S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2\theta)^2\,d\theta = \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{4}\left[\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$$

(2)　$V=2\pi\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = 2\pi\int_0^{\pi} x(-\cos x)'\,dx = 2\pi\left(\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx\right)$

$$=2\pi\left\{(\pi-0)+\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}\right\} = \boldsymbol{2\pi^2}$$