整数の性質

1　**倍数の性質**

a，b は整数とする。$a+b$，a が 3 の倍数ならば，b は 3 の倍数であることを証明せよ。

要　点

整数 a と 0 でない整数 b に対して，

$$a=bk$$

となる整数 k があるとき，a は b の **倍数** であるという。

0 はすべての整数の倍数である。

証明

$a+b$，a が 3 の倍数であるから，整数 k，l を用いて，

$$a+b=3k,\ a=3l$$

と表すことができる。

よって　$b=(a+b)-a=3k-3l=3(k-l)$

$k-l$ は整数であるから，b は 3 の倍数である。

2　**約数の利用**

次の式を満たす整数 x，y の組(x, y)をすべて求めよ。

(1)　$xy=4$　　(2)　$xy-5x-y=0$

要　点

整数 a と 0 でない整数 b に対して，

$$a=bk$$

となる整数 k があるとき，b は a の **約数** であるという。また，a は b で **割り切れる** という。

1 はすべての整数の約数である。すべての整数は，その整数自身の約数である。

また，すべての整数は 0 の約数である。

(2)　（x の式）×（y の式）＝整数　　の形に変形する。

解答

(1)　x は 4 の約数となるから　$x=\pm1,\ \pm2,\ \pm4$

したがって，求める組は

$$\boldsymbol{(x, y)=(1, 4), (2, 2), (4, 1), (-1, -4), (-2, -2), (-4, -1)}$$

(2)　$xy-5x-y=0$ について，

$(y-5)x-(y-5)-5=0$ から

$$(x-1)(y-5)=5$$

と変形できる。

$x-1$，$y-5$ は整数であり，5 の約数は±1，±5 であるから

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-5=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=5 \\ y-5=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=-1 \\ y-5=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=-5 \\ y-5=-1 \end{cases}$$

$x-1$	1	5	-1	-5
$y-5$	5	1	-5	-1
x	2	6	0	-4
y	10	6	0	4

したがって，求める組は

$(x,\ y)=(2,\ 10)$，$(6,\ 6)$，$(0,\ 0)$，$(-4,\ 4)$

3　倍数の判定法

5 個の自然数 2015，2016，2017，2018，2019 のうち，次の条件を満たすものをすべて答えよ。

(1)　2 の倍数　(2)　3 の倍数　(3)　4 の倍数　(4)　5 の倍数　(5)　9 の倍数

要　点

N を自然数とする。

・N が 2 の倍数 ⇔ N の一の位の数が偶数

・N が 5 の倍数 ⇔ N の一の位の数が 0 か 5

・N が 4 の倍数 ⇔ N の下 2 桁の数が 4 の倍数

・N が 3 の倍数 ⇔ N の各位の数の和が 3 の倍数

・N が 9 の倍数 ⇔ N の各位の数の和が 9 の倍数

解答

(1)　5 個の自然数のうち，一の位の数が偶数であるものは　**2016，2018**

(2)　5 個の自然数のうち，各位の数の和が 3 の倍数であるものは　**2016，2019**

(3)　5 個の自然数のうち，下 2 桁の数が 4 の倍数であるものは　**2016**

(4)　5 個の自然数のうち，一の位の数が 0 か 5 であるものは　**2015**

(5)　5 個の自然数のうち，各位の数の和が 9 の倍数であるものは　**2016**

4　素因数分解

次の問いに答えよ。

(1)　次の数を素因数分解せよ。

①　98　　②　100

(2)　$\sqrt{\dfrac{126}{n}}$ が自然数となるような，最小の自然数 n を求めよ。

要　点

素因数分解

1 より大きい自然数で，正の約数が 1 とその数だけのものを **素数** という。（1 でも素数でもない自然数を **合成数** という。）

整数がいくつかの正の約数の積で表されるとき，1 つ 1 つの約数をもとの整数の **因数** という。素数である因数を **素因数** という。整数を素因数の積の形に表すことを **素因数分解** するという。

(2)　$\dfrac{126}{n}$ がある自然数の平方数になればよい。すなわち，$\dfrac{126}{n}$ の素因数分解において，それぞれの素因数の指数がすべて偶数になればよい。

解答

(1)　①　$98 = \mathbf{2 \times 7^2}$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 98 \\ \hline 7 & 49 \\ \hline & 7 \end{array}$$

②　$100 = \mathbf{2^2 \times 5^2}$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 100 \\ \hline 2 & 50 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

(2)　$126 = 2 \times 3^2 \times 7$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 126 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$\dfrac{126}{n} = \dfrac{2 \times 3^2 \times 7}{n}$ の素因数分解において，それぞれの素因数の指数がすべて偶数になる自然数 n は

$n = 2 \times 7$ のとき　$\dfrac{126}{n} = \dfrac{2 \times 3^2 \times 7}{2 \times 7} = 3^2$

$n = 2 \times 3^2 \times 7$ のとき　$\dfrac{126}{n} = \dfrac{2 \times 3^2 \times 7}{2 \times 3^2 \times 7} = 1^2$

したがって，求める自然数 n は　**14**

5　**最大公約数・最小公倍数**

(1)　次の 2 数の最大公約数，最小公倍数を求めよ。

①　6，8　　②　28，42

(2)　次の 3 数の最大公約数，最小公倍数を求めよ。

①　12，15，18　　②　45，60，210

(3)　最大公約数が 9，最小公倍数が 108 となる 2 つの自然数の組をすべて求めよ。

(4)　積が 96，最大公約数が 4 となる 2 つの自然数の組をすべて求めよ。

要　点

最大公約数 は，共通な素因数の指数のうち最小のものをとる。

$40=2^3\times 5$

$300=2^2\times 3\times 5^2$

↓　↓

$2^2\times 5=20$

最小公倍数 は，すべての素因数の指数のうち最大のものをとる。

$40=2^3\times 5$

$300=2^2\times 3\times 5^2$

↓　↓　↓

$2^3\times 3\times 5^2=600$

自然数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を l とし，$a=ga'$，$b=gb'$ とするとき，次のことが成り立つ。

1　a'，b' **は互いに素である**　　**2**　$l=ga'b'$　　**3**　$ab=gl$

解答

(1)　①　$6=2\times 3$

$8=2^3$

最大公約数は　2

最小公倍数は　$2^3\times 3=$**24**

②　$28=2^2\times 7$

$42=2\times 3\times 7$

最大公約数は　$2\times 7=$**14**

最小公倍数は　$2^2\times 3\times 7=$**84**

(2)　①　$12=2^2\times 3$

$15=3\times 5$

$18=2\times 3^2$

最大公約数は　3

最小公倍数は　$2^2\times 3^2\times 5=$**180**

② $45 = 3^2 \times 5$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

最大公約数は $3 \times 5 = \mathbf{15}$

最小公倍数は $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = \mathbf{1260}$

(3) 2つの自然数を a，b $(a < b)$ とすると，最大公約数が9であるから

$a = 9a'$，$b = 9b'$ （a'，b' は互いに素で $a' < b'$）

と表すことができる。このとき，最小公倍数が108であるから $9a'b' = 108$ よって $a'b' = 12$

a'，b' は互いに素で，$a' < b'$ より $(a',\ b') = (1,\ 12)$，$(3,\ 4)$

$(a',\ b') = (1,\ 12)$ のとき $a = 9 \times 1 = 9$，$b = 9 \times 12 = 108$

$(a',\ b') = (3,\ 4)$ のとき $a = 9 \times 3 = 27$，$b = 9 \times 4 = 36$

したがって， **9と108，27と36**

(4) 2つの自然数を a，b $(a < b)$ とし，最小公倍数を l，最大公約数を g とすると，$ab = gl$ が成り立つ。

積が96，最大公約数が4であるから $96 = 4 \times l$ よって $l = 24$

また，$a = 4a'$，$b = 4b'$ （a'，b' は互いに素で $a' < b'$）と表すと，$l = ga'b'$ から $24 = 4a'b'$

よって $a'b' = 6$

a'，b' は互いに素で，$a' < b'$ より $(a',\ b') = (1,\ 6)$，$(2,\ 3)$

$(a',\ b') = (1,\ 6)$ のとき $a = 4 \times 1 = 4$，$b = 4 \times 6 = 24$

$(a',\ b') = (2,\ 3)$ のとき $a = 4 \times 2 = 8$，$b = 4 \times 3 = 12$

したがって， **4と24，8と12**

$\boxed{6}$ **割り算の余りの性質**

a，b は整数とする。a を6で割ると2余り，b を6で割ると3余る。このとき，次の式の値を6で割ったときの余りを求めよ。

(1) $a+b$　　(2) ab

要 点

整数 a と自然数 b に対して

$$\boldsymbol{a = bq + r, \quad 0 \leqq r < b}$$

を満たす整数 q，r がただ1通りに決まる。q を，a を b で割ったときの **商**，r を **余り** という。

解答

整数 k，l を用いて，$a = 6k+2$，$b = 6l+3$ と表すことができる。

(1) $a+b = (6k+2)+(6l+3) = 6(k+l)+5$

ここで，$k+l$ は整数であるから，$a+b$ を6で割ったときの余りは **5** である。

(1) $ab = (6k+2)(6l+3) = 36kl+18k+12l+6 = 6(6kl+3k+2l+1)$

ここで，$6kl+3k+2l+1$ は整数であるから，ab を6で割ったときの余りは **0** である。

7　整数の分類の利用

n は整数とする。n^2 を 3 で割ったときの余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

要　点

一般に，m を 2 以上の自然数として，整数を m で割ったときの余りで分類すると，すべての整数は次のいずれかの形で表される。

mk，$mk+1$，$mk+2$，……，$mk+(m-1)$　(k は整数)

証明

k を整数とすると，すべての整数 n は，$3k$，$3k+1$，$3k+2$ のいずれかの形で表される。

(ⅰ)　$n=3k$ のとき　$n^2=(3k)^2=9k^2=3\cdot 3k^2$

(ⅱ)　$n=3k+1$ のとき　$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

(ⅲ)　$n=3k+2$ のとき　$n^2=(3k+2)^2=9k^2+6k+4=3(3k^2+2k+1)+1$

よって，n^2 を 3 で割ったときの余りは 0 か 1 である。

8　ユークリッドの互除法

次の 2 数の最大公約数を求めよ。

(1)　551，665　　　(2)　1111，1606

要　点

ユークリッドの互除法

自然数 a を自然数 b で割ったときの商を q，余りを r とする。

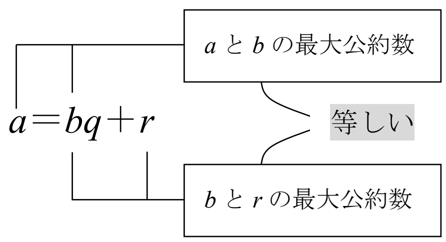
$r>0$ のとき

a と b の最大公約数は，

b と r の最大公約数に等しい。

$r=0$ のとき

a と b の最大公約数は b である。



解答

(1)　$665=551\times 1+114$

$551=114\times 4+95$

$114=\ 95\times 1+19$

$95=\ 19\times 5$

したがって，最大公約数は　**19**

$$\begin{array}{rrrr} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 19\,\overline{)95} & \overline{)114} & \overline{)551} & \overline{)665} \\ \underline{95} & \underline{95} & \underline{456} & \underline{551} \\ 0 & 19 & 95 & 114 \end{array}$$

右の筆算から計算していく。

(2)　$1606=1111\times1+495$

$1111=495\times2+121$

$495=121\times4+11$

$121=11\times11$

したがって，最大公約数は　**11**

11	4	2	1
11) 121	) 495	) 1111	) 1606
121	484	990	1111
0	11	121	495

右の筆算から計算していく。

9　**2 元 1 次不定方程式**

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$3x=8y$　　(2)　$3x+8y=1$　　(3)　$3x+8y=3$

要　点

不定方程式を解くときは，次の性質を利用する。

自然数 a，b は互いに素で，x，y は整数とする。

$ax=by$ が成り立つならば，x は b の倍数，y は a の倍数である。

解答

(1)　$3x=8y$　……①

3 と 8 は互いに素であるから，x は 8 の倍数である。よって，k を整数として　$x=8k$　……②

と表すことができる。

②を①に代入すると　$3\times8k=8y$　　よって　$y=3k$

したがって，整数解は　$\boldsymbol{x=8k,\ y=3k}$（**k は整数**）

(2)　$3x+8y=1$　……①

の 1 組の整数解は $x=3$，$y=-1$ であるから　$3\times3+8\times(-1)=1$　……②

①－②より　$3(x-3)+8(y+1)=0$　　移項すると　$3(x-3)=8(-y-1)$

3 と 8 は互いに素であるから，k を整数として　$x-3=8k$，$-y-1=3k$

したがって，整数解は　$\boldsymbol{x=8k+3,\ y=-3k-1}$（**$k$ は整数**）

(3)　$3x+8y=3$　……①

$3x+8y=1$ の 1 組の整数解は $x=3$，$y=-1$ であるから　$3\times3+8\times(-1)=1$

両辺を 3 倍すると　$3\times9+8\times(-3)=3$　……②

①－②より　$3(x-9)+8(y+3)=0$　　移項すると　$3(x-9)=8(-y-3)$

3 と 8 は互いに素であるから，k を整数として　$x-9=8k$，$-y-3=3k$

したがって，整数解は　$\boldsymbol{x=8k+9,\ y=-3k-3}$（**$k$ は整数**）

〈注意〉(2)で，$3x+8y=1$ の 1 組の整数解を $x=-5$，$y=2$ として解くと　$3(x+5)+8(y-2)=0$ から $x=8k-5$，$y=-3k+2$（k は整数）となる。これは，(2)で求めた $x=8k+3$，$y=-3k-1$（k は整数）の k を $k-1$ に置き換えると得られる。

１０　**有限小数と循環小数，記数法の変換**

(1)　次の分数を小数で表したとき，有限小数になるかどうか調べよ。

①　$\dfrac{1}{64}$　　②　$\dfrac{1}{60}$　　③　$\dfrac{3}{60}$

(2)　次の数を 10 進数で表せ。

①　$110_{(2)}$　　②　$2016_{(7)}$　　③　$10.11_{(2)}$

(3)　次の 10 進数を，[　　] 内で指示された記数法で表せ。

①　11 [2 進法]　　②　100 [3 進法]　　③　$\dfrac{3}{8}$ [2 進法]

要　点

有限小数と循環小数

m，n を自然数とすると，次のことが成り立つ。

・既約分数 $\dfrac{m}{n}$ が有限小数 $\Leftrightarrow$ 分母 n が 2 または 5 だけの素因数をもつ。

・既約分数 $\dfrac{m}{n}$ が循環小数 $\Leftrightarrow$ 分母 n が 2 と 5 以外の素因数をもつ。

記数法

10 の累乗の位取りによる記数法を **10 進法** といい，10 進法で表された数を **10 進数** という。

例えば，10 進数 2016 は　$2\times10^3+0\times10^2+1\times10^1+6$　を表している。

10 進数の各位の数字は，0 以上 9 以下の整数である。

2 の累乗の位取りによる記数法を **2 進法** といい，2 進法で表された数を **2 進数** という。

例えば，2 進数 101 は　$1\times2^2+0\times2^1+1$　を表しているから，10 進数で表すと $4+0+1=5$ となる。

2 進数の各位の数字は，0 または 1 である。10 進数と区別するため，例えば 2 進数 101 は添え字を用いて $101_{(2)}$のように表す。なお，10 進数では，普通 $2016_{(10)}$の$_{(10)}$は省略して，2016 と書く。

一般に，n の累乗の位取りによる記数法を ***n* 進法** といい，n 進法で表された数を ***n* 進数** という。

解答

(1)　①　$64=2^6$ より，分母の素因数は 2 のみである。よって，**有限小数になる**。

②　$60=2^2\times3\times5$ より，分母の素因数に 2 と 5 以外のものがある。よって，**有限小数にならない**。

③　$\dfrac{3}{60}$ を既約分数で表すと　$\dfrac{1}{20}$

$20=2^2\times5$ より，分母の素因数は 2 と 5 のみである。よって，**有限小数になる**。

(2)　①　$110_{(2)}=1\times2^2+1\times2+0=\mathbf{6}$

②　$2016_{(7)}=2\times7^3+0\times7^2+1\times7+6=\mathbf{699}$

③　$10.11_{(2)}=1\times2+0+1\times\dfrac{1}{2}+1\times\dfrac{1}{2^2}=\mathbf{\dfrac{11}{4}}$

(3) ① $11=2\times5+1$

$=2\times(2\times2+1)+1$

$=2^3+2+1$

$=1\times2^3+0\times2^2+1\times2+1$

$=\mathbf{1011_{(2)}}$

2)11
2) 5…1
2) 2…1
  1…0

② $100=3\times33+1$

$=3\times(3\times11)+1$

$=3^2\times11+1$

$=3^2\times(3\times3+2)+1$

$=3^4+3^2\times2+1$

$=1\times3^4+0\times3^3+2\times3^2+0\times3+1$

$=\mathbf{10201_{(3)}}$

3)100
3) 33…1
3) 11…0
3) 3…2
  1…0

③ $\dfrac{3}{8}=\dfrac{2\times1+1}{2^3}=0+0\times\dfrac{1}{2}+1\times\dfrac{1}{2^2}+1\times\dfrac{1}{2^3}=\mathbf{0.011_{(2)}}$

研究１　**末尾に並ぶ0の個数**

30！を計算すると，末尾に0が何個並ぶか。ただし，30！は1から30までのすべての自然数の積を表す。

解答

$30!=30\times29\times28\times27\times\cdots\cdots\times3\times2\times1=2^a\times3^b\times5^c\times7^d\times\cdots\cdots$　（a，b，c，d，…は整数）

30！を素因数分解したとき，素因数2の方が素因数5より多く含まれるので，c より a の方が大きい。

よって　$30!=2^{a-c}\times3^b\times7^d\times\cdots\cdots\times(2^c\times5^c)=2^{a-c}\times3^b\times7^d\times\cdots\cdots\times10^c$

30！を計算したときの末尾に並ぶ0の個数は，c に等しい。すなわち，30！を素因数分解したときの素因数5の個数と等しい。

1から30までの自然数のうち，5の倍数は6個，5^2 の倍数は1個ある。よって，30！は5で6回割り切れ，その商は，さらに5で1回割り切れる。

したがって，30！を素因数分解したときの素因数5の個数は　$6+1=7$（個）

すなわち，末尾に0が **7個** 並ぶ。

研究２　**合同式**

合同式を利用して，次のものを求めよ。

(1) 6^{10} を5で割ったときの余り

(2) 123^{456} を7で割ったときの余り

要　点

合同式

整数 a，b について，$a-b$ が自然数 n で割り切れるとき，a と b は n を **法** として **合同** であるといい，
$\boldsymbol{a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)}$と表す。このような式を **合同式** という。

合同式の性質

次の性質が成り立つ。

$\boxed{1}$　$\boldsymbol{a\equiv a\ (\mathrm{mod}\ n)}$　　$\boxed{2}$　$\boldsymbol{a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)}$ ならば　$\boldsymbol{b\equiv a\ (\mathrm{mod}\ n)}$

$\boxed{3}$　$\boldsymbol{a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)}$ かつ $\boldsymbol{b\equiv c\ (\mathrm{mod}\ n)}$ ならば　$\boldsymbol{a\equiv c\ (\mathrm{mod}\ n)}$

また，$\boldsymbol{a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)}$，$\boldsymbol{c\equiv d\ (\mathrm{mod}\ n)}$のとき，次の性質が成り立つ。

$\boxed{4}$　$\boldsymbol{a+c\equiv b+d\ (\mathrm{mod}\ n)}$　　$\boxed{5}$　$\boldsymbol{a-c\equiv b-d\ (\mathrm{mod}\ n)}$

$\boxed{6}$　$\boldsymbol{ac\equiv bd\ (\mathrm{mod}\ n)}$　　$\boxed{7}$　$\boldsymbol{a^m\equiv b^m\ (\mathrm{mod}\ n)}$　（$\boldsymbol{m}$ は自然数）

解答

(1)　$6\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$であるから　$6^{10}\equiv 1^{10}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$　　したがって，余りは　**1**

(2)　$123\equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 7)$であるから　$123^{456}\equiv 4^{456}\equiv 4^{2\times 228}\equiv 16^{228}\ (\mathrm{mod}\ 7)$

$16\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 7)$であるから　$16^{228}\equiv 2^{228}\equiv 2^{3\times 76}\equiv 8^{76}\ (\mathrm{mod}\ 7)$

$8\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7)$であるから　$8^{76}\equiv 1^{76}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7)$　　したがって，余りは　**1**

$\boxed{\text{研究３}}$　**互いに素であることの証明**

a，b を自然数とするとき，次のことを証明せよ。

(1)　①　a，b が互いに素であるとき，$a+b$，ab は互いに素である。

②　$a+b$，ab が互いに素であるとき，a，b は互いに素である。

(2)　$ax+by=1$ を満たす整数 x，y が存在するとき，a，b は互いに素である。

証明

(1)　①　背理法を用いる。

a，b が互いに素であるとき，$a+b$，ab は互いに素でないと仮定する。

このとき，$a+b$，ab はある素数 p を公約数にもつから

$a+b=pk$　……①，$ab=pl$　……②　（k，l は自然数）

と表すことができる。②から，a または b は p の倍数である。

a が p の倍数であるとき，$a=pm$ となる自然数 m がある。このとき，①から

$$b=pk-a=pk-pm=p(k-m)$$

となり，b も p の倍数である。このことは，a，b が互いに素であることに矛盾する。

b が p の倍数であるときも，同様にして a も p の倍数となり，矛盾する。

したがって，a，b が互いに素であるとき，$a+b$，ab は互いに素である。

② 背理法を用いる。

$a+b$，ab が互いに素であるとき，a，b は互いに素でないと仮定する。

このとき，a，b はある素数 p を公約数にもつから　$a=pk$　$b=pl$　（k，l は自然数）

と表すことができる。このとき　$a+b=pk+pl=p(k+l)$，$ab=pk\cdot pl=p^2kl$

$k+l$，kl は自然数であるから，$a+b$，ab はともに p の倍数である。

このことは，$a+b$，ab が互いに素であるに矛盾する。

したがって，$a+b$，ab が互いに素であるとき，a，b は互いに素である。

(2)　a，b は互いに素でないと仮定する。

このとき，a，b はある素数 p を公約数にもつから　$a=pk$　$b=pl$　（k，l は自然数）

と表すことができる。これらを，$ax+by=1$ に代入すると　$pkx+ply=1$　$p(kx+ly)=1$

$kx+ly$ は整数であるから，p は 1 の約数となるが，このことは p が素数であることに矛盾する。

したがって，$ax+by=1$ を満たす整数 x，y が存在するとき，a，b は互いに素である。

研究４　**部屋割り論法（鳩の巣原理）**

1 から 6 までの自然数が書かれた 6 枚のカードがある。この中から無作為に 4 枚のカードを選ぶと，それらのカードの中には，合計が 7 である 2 枚のカードの組が含まれる。このことを，部屋割り論法を用いて証明せよ。

要　点

部屋割り論法

n 個の部屋に $n+1$ 人以上の人を入れると，いずれかの部屋には 2 人以上入ることになる。

証明

与えられた 6 枚のカードを次のような組に分ける。

{1，6}，{2，5}，{3，4}

このとき，各組に入る 2 つの数の合計はすべて 7 である。これらの組は 3 種類あるので，1 から 6 までの自然数が書かれた 6 枚のカードから無作為に 4 枚のカードを選ぶと部屋割り論法により，同じ組に入る 2 つの数がある。よって，1 から 6 までの自然数が書かれた 6 枚のカードから無作為に 4 枚のカードを選ぶと，合計が 7 である 2 枚のカードの組が含まれる。