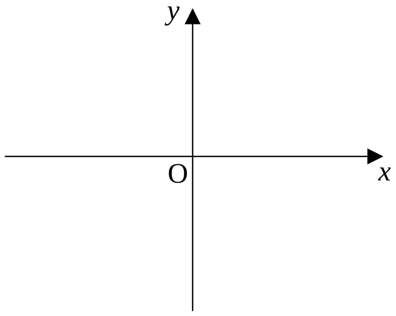
三角関数

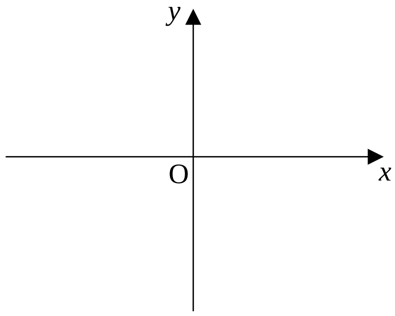
1　**動径の表す角（角の図示，第〇象限）**

点 O を原点とする座標平面において，x 軸の正の部分を始線にとり，次の角だけ回転した動径 OP を図示せよ。また，動径 OP の表す一般角 θ を，$\theta=\alpha+360°\times n$（$0°\leqq\alpha<360°$，$n$ は整数）の形で表し，第何象限の角か答えよ。

(1)　500°



(2)　$-100°$

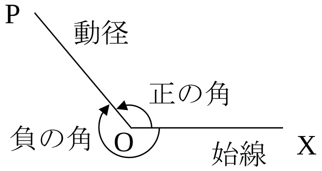


要　点

一般角

平面上において，点 O を中心として半直線 OP を回転させるとき，この半直線 OP を **動径** といい，その最初の位置を示す半直線 OX を **始線** という。

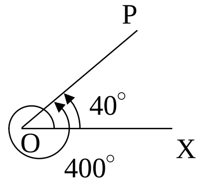
時計の針の回転と逆の向き（正の向き）に回転した角を **正の角**，
時計の針の回転と同じ向き（負の向き）に回転した角を **負の角**
という。



回転の向きと大きさを表す量として拡張した角を **一般角** という。
また，一般角 θ に対して，始線 OX から角 θ だけ回転した位置にある動径 OP を，**θ の動径** という。

動径の表す角

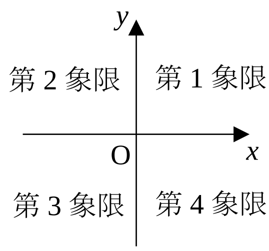
始線の位置を決めたとき，角が定まると動径の位置が決まる。
しかし，動径の位置を定めても動径の位置を表す角は 1 つに決まらない。一般に，動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると，動径 OP の表す角は，$\alpha+360°\times n$（n は整数）と表される。



40° の位置の動径 OP は
400° の動径でもある。

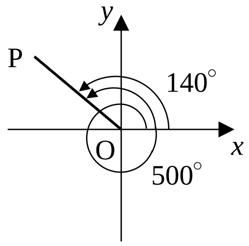
象限の角

点 O を原点とする座標平面において，x 軸の正の部分を始線にとり，動径 OP の表す角を θ とするとき，動径 OP が第 1 象限にあるなら θ を **第 1 象限の角** という。第 2 象限の角，第 3 象限の角，第 4 象限の角も同様に定める。



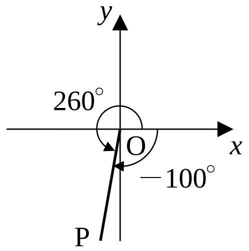
解答

(1)



500° ＝140° ＋360° ×1，第 2 象限の角

(2)



－100° ＝260° ＋360° ×(－1)，第 3 象限の角

$\boxed{2}$ **弧度法**

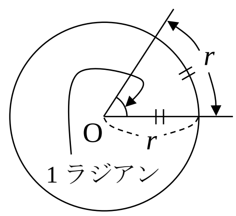
次の角を，度数は弧度に，弧度は度数にそれぞれ書きなおせ。

(1)　60°　　(2)　-210°　　(3)　$\dfrac{\pi}{4}$　　(4)　$-\dfrac{7}{20}\pi$

要　点

弧度法

1 つの円において，半径と同じ長さの弧に対する中心角を α とする。この角 α は，半径に関係なく一定である。この角の大きさを **1 ラジアン**，または **1 弧度** といい，1 ラジアンを単位とする角の大きさの表し方を **弧度法** という。



度数法と弧度法の間には，次の関係がある。

$$\begin{cases} \mathbf{180^\circ = \boldsymbol{\pi}ラジアン} \\ \mathbf{1^\circ = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{180}ラジアン} \end{cases},\qquad \mathbf{1ラジアン = \left(\dfrac{180}{\boldsymbol{\pi}}\right)^\circ \fallingdotseq 57.3^\circ}$$

弧度法では，普通，ラジアンという単位は省略して表す。

解答

(1)　$60^\circ = 60\times\dfrac{\pi}{180} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$

(2)　$-210^\circ = -210\times\dfrac{\pi}{180} = \boldsymbol{-\dfrac{7}{6}\pi}$

(3)　$\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{4}\times 180^\circ = \mathbf{45^\circ}$

(4)　$-\dfrac{7}{20}\pi = -\dfrac{7}{20}\times 180^\circ = \mathbf{-63^\circ}$

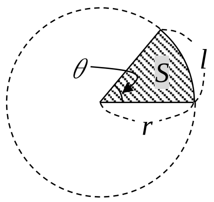
3　扇形の弧の長さと面積

半径 10，中心角が $\frac{2}{5}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

要　点

半径が r，中心角が θ の扇形において

弧の長さ l は　$\boldsymbol{l = r\theta}$　　$\boxed{\frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi}}$



面積 S は　$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl}$　　$\boxed{\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}}$

解答

$\boldsymbol{l} = r\theta = 10 \cdot \frac{2}{5}\pi = \boldsymbol{4\pi}$

$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \frac{2}{5}\pi = \boldsymbol{20\pi}$

S の別解　$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4\pi = 20\pi$

4　三角関数の値

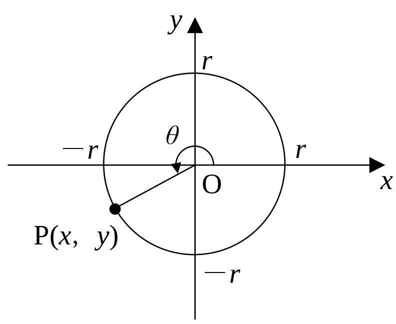
θ が次の値のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

(1)　$\frac{\pi}{4}$　　　　(2)　$-\frac{2}{3}\pi$

要　点

一般角の三角関数の定義

x 軸の正の部分を始線とし，角 θ の動径と原点 O を中心とする半径 r の円との交点を P$(x,\ y)$とする。
このとき，一般角 θ に対する正弦，余弦，正接を，次のように定義する。



正弦　$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{y}{r}}$　　余弦　$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{x}{r}}$　　正接　$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{y}{x}}$

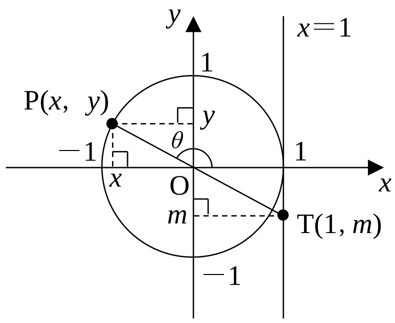
ただし，$\tan\theta$ は，$x=0$ となるような θ に対しては定義されない。
$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を角 θ の **三角関数** という。

三角関数の値域

原点を中心とする半径 1 の円を **単位円** という。

右の図のように，角 θ の動径と単位円の交点を P(x，y)とし，

直線 OP と直線 x＝1 の交点を T(1，m)とすると



$$\sin\theta=\frac{y}{1}=y,\quad \cos\theta=\frac{x}{1}=x,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{m}{1}=m$$

よって　y＝sin θ，x＝cos θ，m＝tan θ

右の図において，点 P(x，y)が単位円の周上を動き，それに伴って

点 T(1，m)は直線 x＝1 のすべての点を動くから

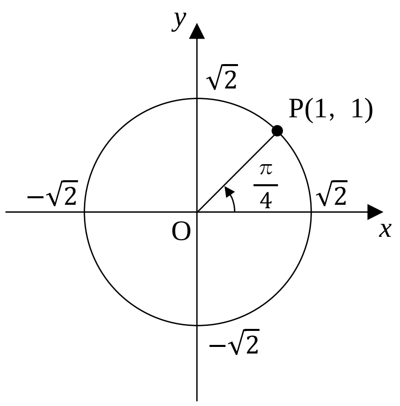
－1≦x≦1，－1≦y≦1，m はすべての実数値をとる。

したがって　**－1≦sin θ ≦1，－1≦cos θ ≦1，tan θ はすべての実数値をとる。**

解答

(1)　$\frac{\pi}{4}$の動径と，原点を中心とする半径$\sqrt{2}$の円との

交点を P とすると，P(1，1)であるから



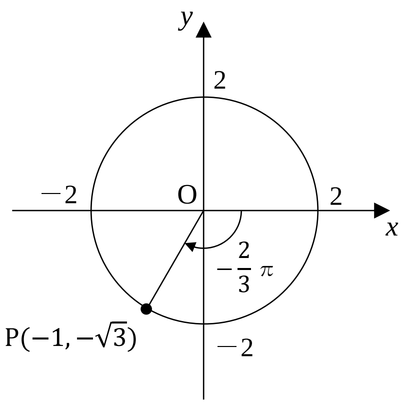
$$\boldsymbol{\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boldsymbol{\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{1}=\boldsymbol{1}$$

(2)　$-\frac{2}{3}\pi$の動径と，原点を中心とする半径 2 の円との

交点を P とすると，$\mathrm{P}\left(-1,\ -\sqrt{3}\right)$であるから



$$\boldsymbol{\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)}=\frac{-\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boldsymbol{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)}=\frac{-1}{2}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{\tan\left(-\frac{2}{3}\pi\right)}=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

5　**三角関数の相互関係**

θ が第 3 象限の角で，$\sin\theta=-\frac{1}{5}$のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

要　点

一般角の三角関数についても，数学Ⅰで学習した三角比と同じように，次の相互関係が成り立つ。

三角関数の相互関係

$$\boldsymbol{\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\qquad \boldsymbol{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}\qquad \boldsymbol{1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

解答

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{24}{25}$

θ が第 3 象限の角であるから　$\cos\theta<0$

よって　$\boldsymbol{\cos\theta=-\sqrt{\frac{24}{25}}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}}$

また　$\boldsymbol{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{1}{5}\right)\div\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)=\frac{1}{2\sqrt{6}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{12}}$

別解　図をかいて求める。

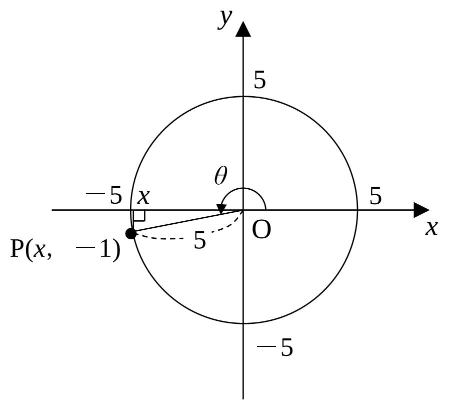
条件から，$r=5$，$y=-1$ である

点 P(x，-1)を第 3 象限にとる。

このとき　$x=-\sqrt{5^2-1^2}=-2\sqrt{6}$

よって　$\cos\theta=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\tan\theta=\frac{-1}{-2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{12}$



6　**三角関数を含む式の値**

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

要　点

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用するため，与式の両辺を 2 乗する。

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$を利用する。

解答

(1)　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2}{3}$ の両辺を 2 乗すると　$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \dfrac{4}{9}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より　$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{4}{9}$　　よって　$\sin\theta\cos\theta = -\boldsymbol{\dfrac{5}{18}}$

(2)　$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) = \dfrac{2}{3}\left\{1 - \left(-\dfrac{5}{18}\right)\right\} = \boldsymbol{\dfrac{23}{27}}$

別解　$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)^3 - 3\sin\theta\cos\theta\,(\sin\theta + \cos\theta)$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{5}{18}\right)\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{27} + \frac{5}{9} = \frac{23}{27}$$

7　三角関数の性質

次の値を求めよ。

(1)　$\sin\dfrac{15}{4}\pi$　　(2)　$\tan\left(-\dfrac{5}{3}\pi\right)$　　(3)　$\sin\dfrac{6}{7}\pi + \cos\dfrac{9}{14}\pi$

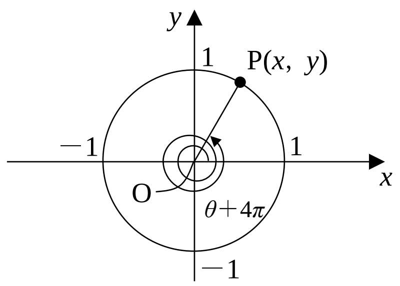
要　点

$\theta + 2n\pi$ の三角関数　　n は整数とする。

$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$

$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$

$\tan(\theta + 2n\pi) = \tan\theta$

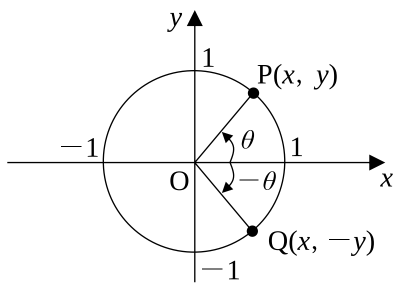


$-\theta$ の三角関数

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

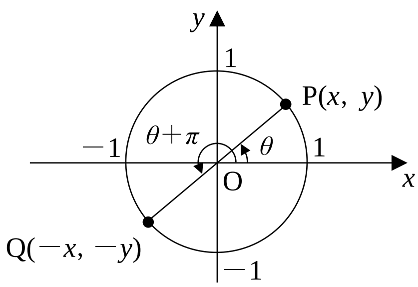


$\theta + \pi$ の三角関数

$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$

$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$



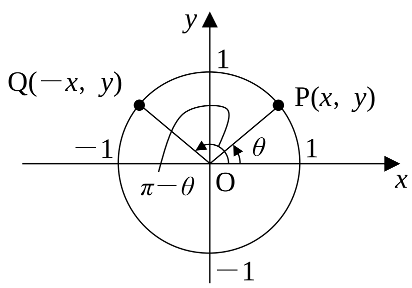
θ を $-\theta$ に置き換えて

$\pi - \theta$ の三角関数

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

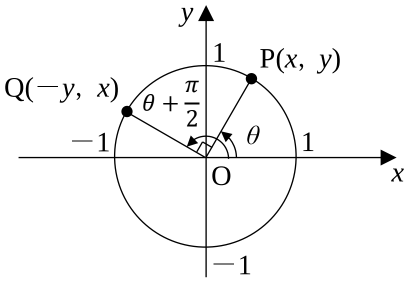


$\boldsymbol{\theta+\frac{\pi}{2}}$ の三角関数

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$$



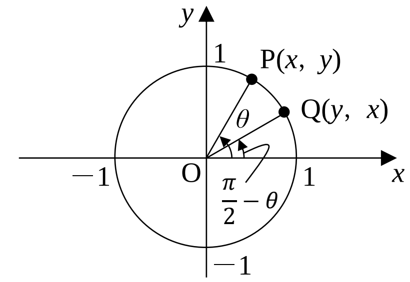
θ を $-\theta$ に置き換えて

$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}-\theta}$ の三角関数

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$$



解答

(1) $\sin\frac{15}{4}\pi=\sin\left(\frac{7}{4}\pi+2\pi\right)=\sin\frac{7}{4}\pi=-\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(2) $\tan\left(-\frac{5}{3}\pi\right)=-\tan\frac{5}{3}\pi=-(-\sqrt{3})=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(3) $\sin\frac{6}{7}\pi+\cos\frac{9}{14}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}=\boldsymbol{0}$

8　三角関数のグラフ

(1) 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

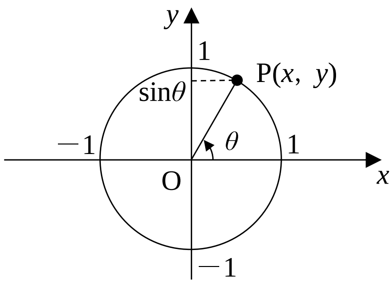
① $y=2\cos\theta$　② $y=\sin\theta-1$　③ $y=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$　④ $y=\sin\frac{1}{2}\theta$

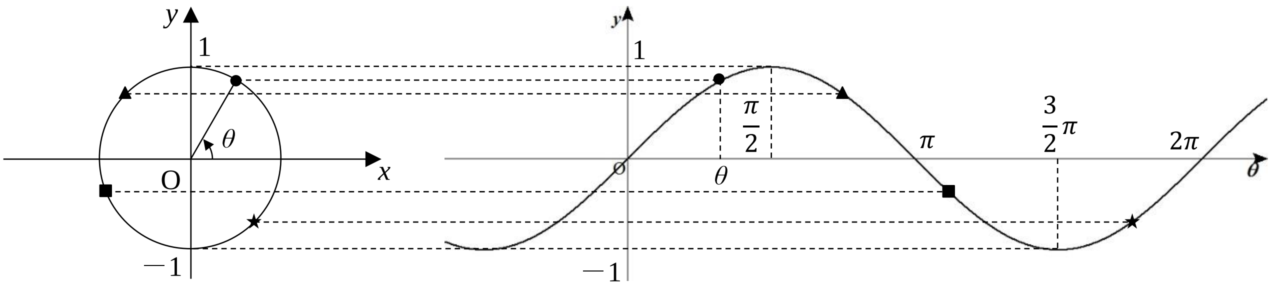
(2) (1)の①～④の関数について，偶関数であるもの，奇関数であるものをそれぞれ答えよ。

要　点

$y=\sin\theta$ のグラフ

角 θ の動径と単位円の交点を P とすると，
点 P の y 座標が $\sin\theta$ である。
このことから，関数 $y=\sin\theta$ のグラフは
次のようになる。

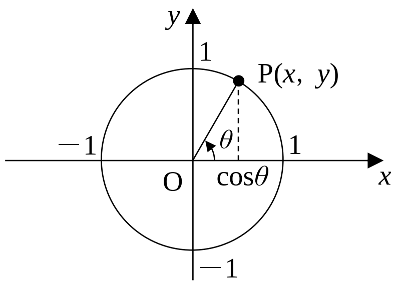


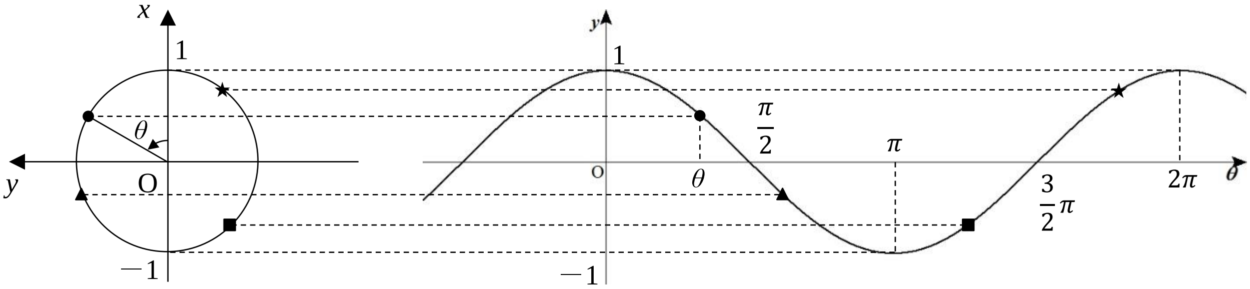


・$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$ から，**$y=\sin\theta$ は周期 2π の周期関数**である。
・$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$ より，**$y=\sin\theta$ の値域は　$-1\leqq y\leqq 1$**
・$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ より，**$y=\sin\theta$ のグラフは原点に関して対称**である。

$y=\cos\theta$ のグラフ

角 θ の動径と単位円の交点を P とすると，
点 P の x 座標が $\cos\theta$ である。
このことから，関数 $y=\cos\theta$ のグラフは
次のようになる。



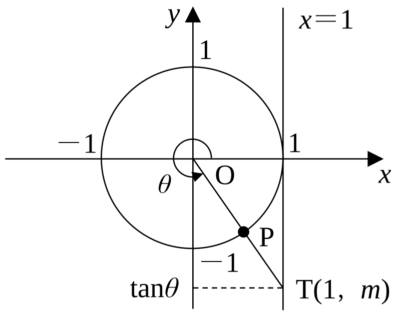


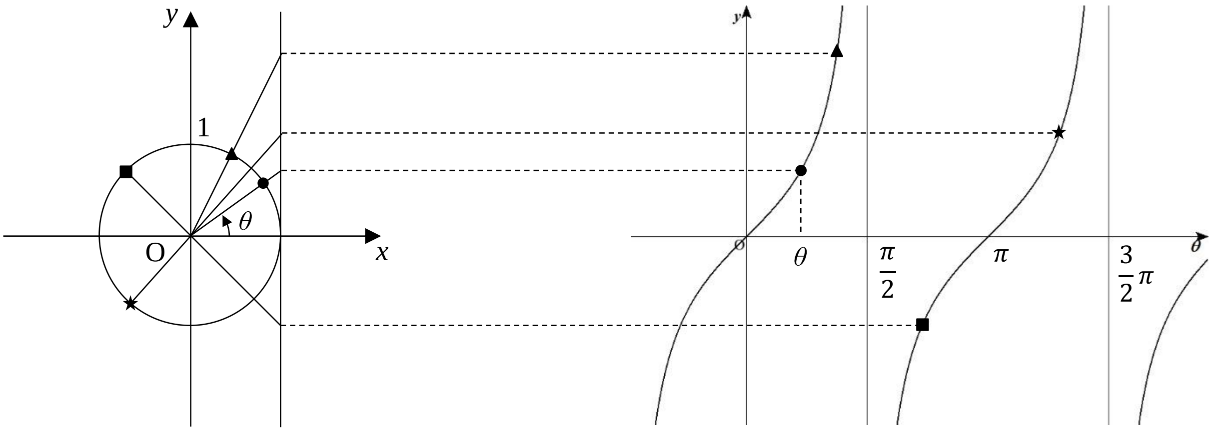
・$\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$ から，**$y=\cos\theta$ は周期 2π の周期関数**である。
・$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ より，**$y=\cos\theta$ の値域は　$-1\leqq y\leqq 1$**
・$\cos(-\theta)=\cos\theta$ より，**$y=\cos\theta$ のグラフは y 軸に関して対称**である。
〈注意〉$y=\sin\theta$ のグラフの形の曲線を正弦曲線（サインカーブ）という。

y＝tan θ のグラフ

角 θ の動径と単位円の交点を P，直線 OP と直線 x＝1 の交点を T(1，m)とすると，m＝tan θ である。

このことから，関数 y＝tan θ のグラフは次のようになる。





・tan(θ ＋ π)＝tan θ から，**y＝tan θ は周期 π の周期関数**である。

・**y＝tan θ の値域は　実数全体**

・tan(－ θ)＝－tan θ より，**y＝tan θ のグラフは原点に関して対称**である。

〈注意〉グラフが一定の直線に近づいていくとき，その直線をグラフの漸近線という。

直線 $\theta=-\frac{\pi}{2}$，$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\theta=\frac{3}{2}\pi$，……は，$y=\tan\theta$ のグラフの漸近線である。

偶関数・奇関数

一般に，関数 $f(x)$において，

$f(-x)=-f(x)$ がつねに成り立つとき，**$f(x)$は奇関数**

$f(-x)=f(x)$ がつねに成り立つとき，**$f(x)$は偶関数**

であるという。

奇関数のグラフは，原点に関して対称であり，

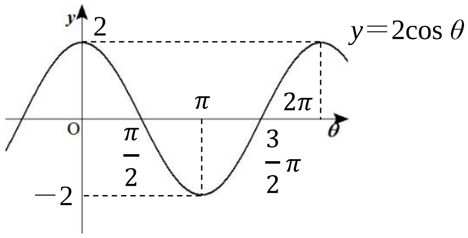
偶関数のグラフは，y 軸に関して対称である。

y＝sin θ，y＝tan θ は奇関数，y＝cos θ は偶関数である。

解答

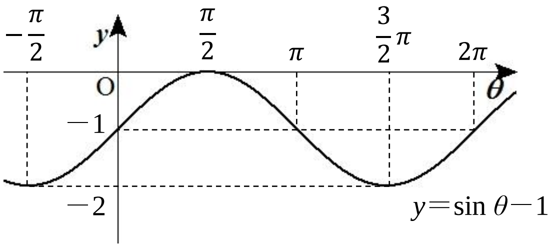
(1)　①　グラフは右のようになる。

　　周期は　**2π**



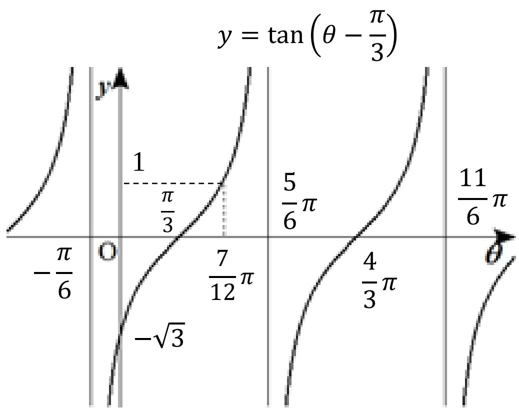
②　グラフは右のようになる。

　　周期は　**2π**



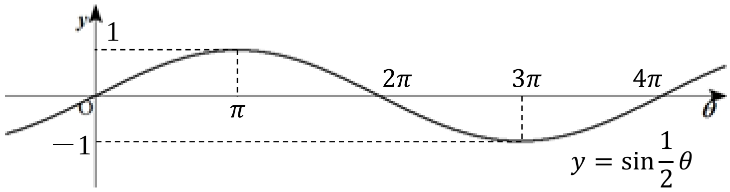
③　グラフは右のようになる。

　　周期は　**π**



④　グラフは右のようになる。

　　周期は　**4π**



(2)　①～④において，$y=f(\theta)$ とする。

①　$f(-\theta)=2\cos(-\theta)=2\cos\theta=f(\theta)$

②　$f(-\theta)=\sin(-\theta)-1=-\sin\theta-1$

③　$f(-\theta)=\tan\left(-\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

④　$f(-\theta)=\sin\left(-\frac{1}{2}\theta\right)=-\sin\frac{1}{2}\theta=-f(\theta)$

よって，**偶関数であるものは　①**

　　　　奇関数であるものは　④

9　**三角方程式，三角不等式**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$　　　　(2)　$\sin\theta > -\dfrac{1}{2}$

要　点

三角方程式は単位円を利用して解く。

・$\sin\theta = s$　……　直線 $y = s$ と単位円の交点を P，Q とする。

・$\cos\theta = c$　……　直線 $x = c$ と単位円の交点を P，Q とする。

・$\tan\theta = t$　……　直線 $y = tx$ と直線 $x = 1$ の交点を T として，直線 OT と単位円の交点を P, Q とする。

上記の点 P，Q に対して，求める θ は x 軸の正の部分と動径 OP のなす角，x 軸の正の部分と動径 OQ のなす角である。

三角不等式は，まず不等式を等号にした三角方程式を解く。その上で，例えば三角不等式 $\sin\theta > s$ は領域 $y > s$ と単位円の交わる部分から θ の範囲を求める。

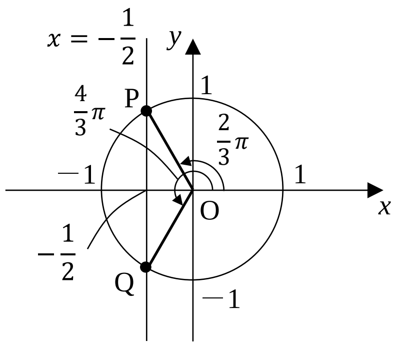
解答

(1)　直線$x = -\dfrac{1}{2}$と単位円の交点を，

右の図のような P，Q とする。

よって，求める θ は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi}$$

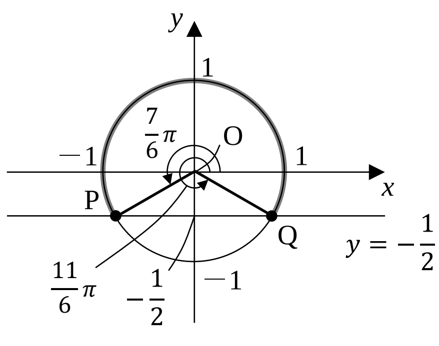


(2)　直線$y = -\dfrac{1}{2}$と単位円の交点を，

右の図のような P，Q とする。

よって，不等式を満たす θ の範囲は

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi}$$



１０　**三角関数を含むやや複雑な方程式・不等式**

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$のとき，方程式$\sqrt{2}\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$ を解け。

(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

①　$2\cos^2\theta - \sin\theta - 1 = 0$　　　　②　$2\cos^2\theta - \sin\theta - 1 \geqq 0$

要　点

(1)　まず，$X=\theta+\dfrac{\pi}{3}$ と置き換えて考える。X のとり得る値の範囲に注意する。

(2)　複数の種類の三角関数を含む式は，まず 1 種類の三角関数で表すことを考える。本問では $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用して $\sin\theta$ だけで表す。

解答

(1)　$X=\theta+\dfrac{\pi}{3}$ とおくと　$\cos X=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

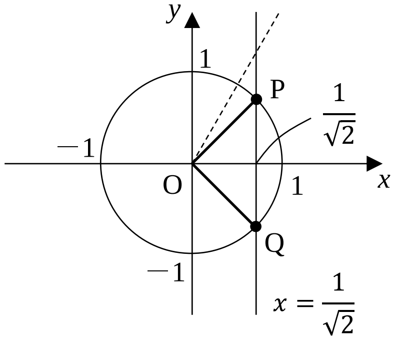
ここで，X のとり得る値の範囲は

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}<2\pi+\dfrac{\pi}{3}$

よって　$\dfrac{\pi}{3}\leqq X<\dfrac{7}{3}\pi$

これから，求める X は　$X=\dfrac{7}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi$

すなわち　$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi$　　以上から　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{17}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi}$



(2)　①　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

よって，与式は　$2(1-\sin^2\theta)-\sin\theta-1=0$

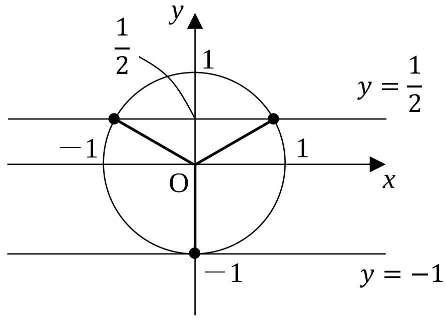
$2-2\sin^2\theta-\sin\theta-1=0$

$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0$

これから　$\sin\theta=\dfrac{1}{2},\ -1$

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi}$



②　①と同様に変形すると

$2(1-\sin^2\theta)-\sin\theta-1\geqq0$

$2-2\sin^2\theta-\sin\theta-1\geqq0$

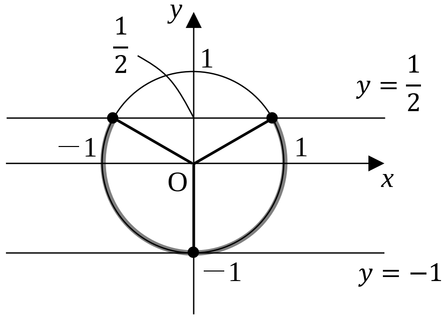
$2\sin^2\theta+\sin\theta-1\leqq0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)\leqq0$

これから　$-1\leqq\sin\theta\leqq\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ から，求める θ の範囲は

$\boldsymbol{0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi\leqq\theta<2\pi}$



１１　**三角関数を含む関数の最大値・最小値**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = -\cos^2\theta + \sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。

また，そのときの θ の値を求めよ。

要　点

・まず，1 種類の三角関数で表すことを考える。

・三角関数を t で置き換えると，y が t の 2 次関数になる場合，三角関数を t で置き換える。このとき，t のとり得る値の範囲に注意する。

解答

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

よって，与えられた関数は　$y = -(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta$

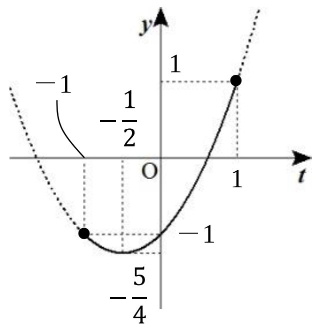
$= \sin^2\theta + \sin\theta - 1$

と変形できる。ここで，$\sin\theta = t$ とおくと　$-1 \leqq t \leqq 1$

与えられた関数は　$y = t^2 + t - 1$

$$= \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1$$

$$= \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

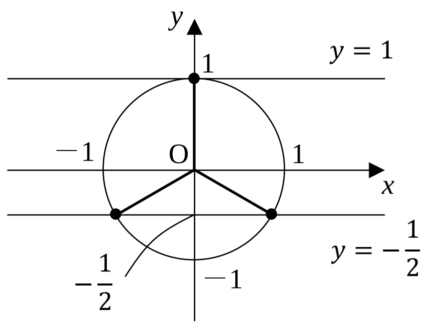


したがって，yは　$t = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{5}{4}$，$t = 1$ のとき最大値 1 をとる。

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$t = -\frac{1}{2}$ となるのは，$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ から　$\theta = \frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$，

$t = 1$ となるのは，$\sin\theta = 1$ から　$\theta = \frac{\pi}{2}$



以上から　$\boldsymbol{\theta = \frac{7}{6}\pi}$，$\boldsymbol{\frac{11}{6}\pi}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-\frac{5}{4}}$

$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$ **のとき最大値1**

１２　**三角関数の加法定理**

次の値を求めよ。

(1)　$\sin 165°$　　(2)　$\cos 75°$　　(3)　$\tan\frac{\pi}{12}$

要　点

正弦，余弦の加法定理

$\boxed{1}$ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\boxed{2}$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

〈注意〉覚えるのが大変な公式なので，次のような語呂合わせが考案されています。

$\sin(\alpha+\beta)=$ $\sin\alpha$ $\cos\beta$ $+$ $\cos\alpha$ $\sin\beta$

咲いたコスモス　コスモス咲いた

$\cos(\alpha+\beta)=$ $\cos\alpha$ $\cos\beta$ $-$ $\sin\alpha$ $\sin\beta$

コスモスコスモス　咲かない咲かない

※左辺や右辺の符号には十分注意してください。

（別バージョン）　$\sin(\alpha+\beta)$ 　$=\sin\alpha\cos\beta+$ $\cos\alpha$ 　$\sin\beta$

サンタ（サイン，足す）は 最　高，　こっそり侵入

正接の加法定理

$\boxed{3}$ $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

解答

(1)　$\sin 165°=\sin(30°+135°)=\sin 30°\cos 135°+\cos 30°\sin 135°$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$\boxed{\text{別解}}$ $165°=45°+120°$ と考えてもよい。

$\sin 165°=\sin(45°+120°)=\sin 45°\cos 120°+\cos 45°\sin 120°$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2)　$\cos 75°=\cos(30°+45°)=\cos 30°\cos 45°-\sin 30°\sin 45°$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$\boxed{\text{別解}}$ $75°=120°-45°$ と考えてもよい。

$\cos 75°=\cos(120°-45°)=\cos 120°\cos 45°+\sin 120°\sin 45°$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(3)　$\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}$ であるから

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=\mathbf{2-\sqrt{3}}$$

> 弧度法の $\dfrac{\pi}{12}$ を，度数法に直すと
>
> $\dfrac{1}{12}\times 180^\circ\ =15^\circ$
>
> $15^\circ=45^\circ-30^\circ$ と考えることができる。

別解　$\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ と考えてもよい。

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=2-\sqrt{3}$$

１３　三角関数の加法定理の利用

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ で，$\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\sin\beta=\dfrac{4}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin(\alpha+\beta)$　　　　(2)　$\cos(\alpha+\beta)$

要　点

まず，$\cos\alpha$，$\cos\beta$ を求める。各象限における三角関数の値の符号に注意する。

解答

(1)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\cos\alpha>0$　　よって　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より　$\cos\beta<0$　　よって　$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$

したがって　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)+\dfrac{\sqrt{5}}{3}\cdot\dfrac{4}{5}=\mathbf{\dfrac{4\sqrt{5}-6}{15}}$

(2)　(1)より　$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$ であるから

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=-\mathbf{\frac{3\sqrt{5}+8}{15}}$$

$\boxed{１４}$ **2直線のなす角**

2直線 $y=2x$，$x-3y+1=0$ のなす鋭角 θ を求めよ。

要　点

直線の傾きを m，x 軸の正の部分とその直線のなす角を α とすると，$\tan\alpha=m$ であることを利用する。
一方の直線と x 軸の正の部分のなす角を α，もう一方の直線と x 軸の正の部分のなす角を β とし，$\alpha>\beta$ とすると，本問の求める鋭角 θ は，$\theta=\alpha-\beta$ または $\pi-(\alpha-\beta)$ である。
以上から，$\tan(\alpha-\beta)$ の値を加法定理を利用して求めればよい。

解答

直線 $y=2x$ の傾きは　2

直線 $x-3y+1=0$ は直線 $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ と変形できるので，傾きは　$\frac{1}{3}$

2直線と x 軸の正の部分のなす角を，それぞれ α，β とすると　$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$

よって　$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=1$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より　$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}$

$\boxed{１５}$ **2倍角の公式**

$\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$ で，$\cos\alpha=\frac{1}{3}$ のとき，$\sin2\alpha$，$\cos2\alpha$，$\tan2\alpha$ の値を求めよ。

要　点

2倍角の公式

$\boxed{1}$ $\mathbf{\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$

$\boxed{2}$ $\mathbf{\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

$\mathbf{=1-2\sin^2\alpha}$

$\mathbf{=2\cos^2\alpha-1}$

$\boxed{3}$ $\boldsymbol{\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$　　$\boldsymbol{\left(\tan2\alpha=\dfrac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}\right)}$

解答

$\dfrac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ より　$\sin\alpha < 0$　　よって　$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

したがって　$\boldsymbol{\sin 2\alpha} = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{3} = \boldsymbol{-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}}$

$\boldsymbol{\cos 2\alpha} = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 - 1 = \boldsymbol{-\dfrac{7}{9}}$

$\boldsymbol{\tan 2\alpha} = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \left(-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\right) \div \left(-\dfrac{7}{9}\right) = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{2}}{7}}$

１６　**半角の公式**

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ のとき，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

要　点

半角の公式

1　$\boldsymbol{\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$　　2　$\boldsymbol{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$　　3　$\boldsymbol{\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

解答

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より　$\cos\alpha < 0$　　よって　$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{\dfrac{144}{169}} = -\dfrac{12}{13}$

また，$\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より　$\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$，$\tan\dfrac{\alpha}{2} > 0$

したがって　$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2} = \dfrac{1-\left(-\dfrac{12}{13}\right)}{2} = \dfrac{25}{26}$

$\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$ であるから　$\boldsymbol{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \sqrt{\dfrac{25}{26}} = \boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{26}}{26}}$

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2} = \dfrac{1+\left(-\dfrac{12}{13}\right)}{2} = \dfrac{1}{26}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$ であるから　$\boldsymbol{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{26}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{26}}{26}}$

$\boldsymbol{\tan\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{5\sqrt{26}}{26} \div \dfrac{\sqrt{26}}{26} = \boldsymbol{5}$

１７　**三角関数を含むやや複雑な方程式・不等式（2 倍角の公式の利用）**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin 2\theta = \sqrt{3}\cos\theta$　　　(2)　$\cos 2\theta < 3\sin\theta - 1$

要　点

まず，2 倍角の公式を利用して角を θ に統一する。

(2) は三角関数の種類を 1 種類にするため，$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ を用いる。

解答

(1)　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ より，与式は　$2\sin\theta\cos\theta = \sqrt{3}\cos\theta$

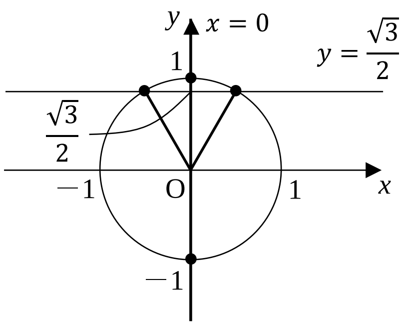
整理すると　$\cos\theta\left(2\sin\theta - \sqrt{3}\right) = 0$

よって，$\cos\theta = 0$　または　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから，

$\cos\theta = 0$ より　$\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より　$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$



以上から　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi}$

(2)　$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ より，与式を変形すると　$1 - 2\sin^2\theta < 3\sin\theta - 1$

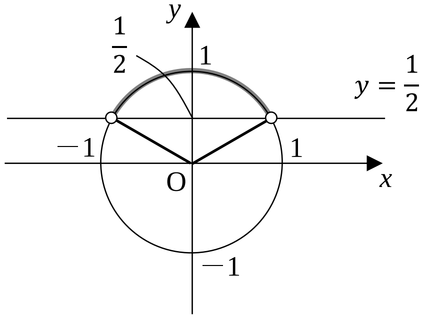
$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 > 0$

$(\sin\theta + 2)(2\sin\theta - 1) > 0$

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であるから，つねに　$\sin\theta + 2 > 0$

よって　$2\sin\theta - 1 > 0$　　すなわち　$\sin\theta > \dfrac{1}{2}$

したがって　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{5}{6}\pi}$



１８　**三角関数の合成**

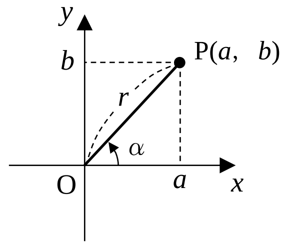
次の式を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r > 0$，$-\pi < \alpha \leqq \pi$ とする。

(1)　$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$　　　(2)　$-\sin\theta - \cos\theta$

要　点

三角関数の加法定理を利用して，$a\sin\theta+b\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$の形に変形することができる。
この変形を，**三角関数の合成** という。
$a\sin\theta+b\cos\theta$ に対して，座標が$(a,\ b)$である点 P をとり，
OP＝r とする。
また，線分 OP と x 軸の正の部分のなす角を α とすると

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\ a=r\cos\alpha,\ b=r\sin\alpha$$



であるから，三角関数の加法定理を利用すると

$$\begin{aligned}a\sin\theta+b\cos\theta&=r\cos\alpha\sin\theta+r\sin\alpha\cos\theta=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)=r\sin(\theta+\alpha)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

以上から　$\boldsymbol{a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)}$

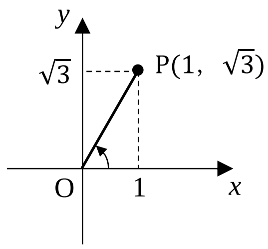
ただし　$\boldsymbol{\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}$，$\boldsymbol{\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

解答

(1)　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ に対して，右の図のように点 $\mathrm{P}(1,\ \sqrt{3})$をとると

$$r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2,\ \alpha=\frac{\pi}{3}$$

よって　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\boldsymbol{2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)}$



〈注意〉右辺に加法定理を用いることで，正しく変形できているかどうか確認することができる。

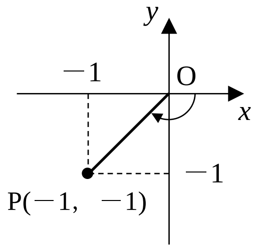
$$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$$

(2)　$-\sin\theta-\cos\theta$ に対して，右の図のように点 P(－1，－1)をとると

$$r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2},$$

$$\alpha=-\frac{3}{4}\pi$$

よって　$-\sin\theta-\cos\theta=\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{3}{4}\pi\right)}$



$\boxed{１９}$　**三角方程式，三角不等式（三角関数の合成の利用）**

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

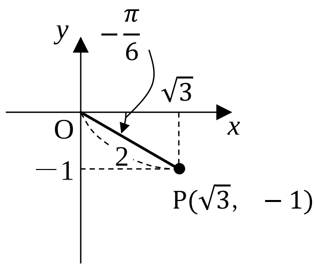
(1)　$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{2}=0$　　　(2)　$\sin\theta+\cos\theta\geqq1$

要　点

三角関数の合成を利用して，1 種類の三角関数で式を表す。

解答

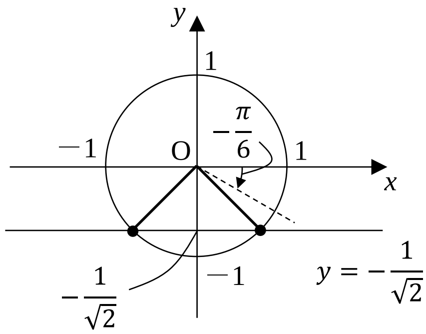
(1)　右の図から



$$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

よって，与えられた式を変形すると

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

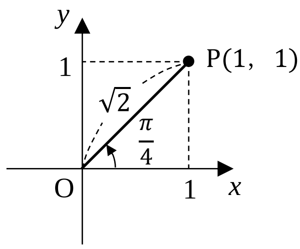


$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$であるから

$$\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

したがって　$\boldsymbol{\theta=\frac{17}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi}$

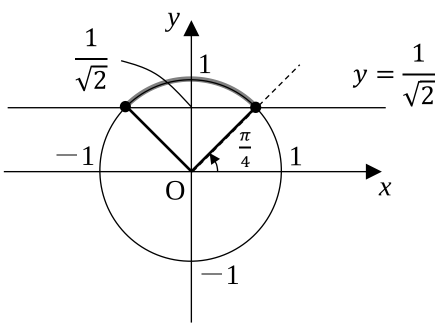
(2)　右の図から



$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

よって，与えられた式を変形すると

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$であるから

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

を解くと　$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

これから　$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$　　　したがって　$\boldsymbol{0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}}$

２０　**三角関数を含む関数の最大値・最小値（三角関数の合成の利用）**

$0\leqq\theta<2\pi$のとき，関数$y=-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。

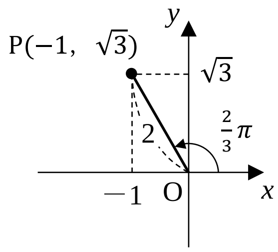
また，そのときの θ の値を求めよ。

要　点

三角関数の合成を利用して，1 種類の三角関数で表す。合成した後の変域に注意する。

解答

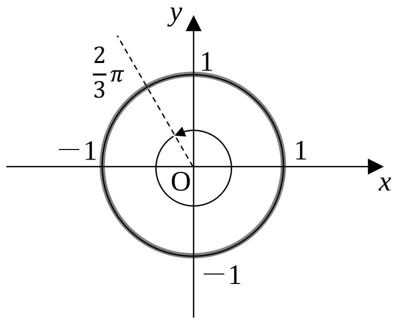
右の図から



$$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$$

よって，与えられた関数は　$y=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\frac{2}{3}\pi\leqq\theta+\frac{2}{3}\pi<\frac{8}{3}\pi$



$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\leqq 1$ から　$-2\leqq y\leqq 2$

$\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=1$ のとき，$\theta+\frac{2}{3}\pi=\frac{5}{2}\pi$ より　$\theta=\frac{11}{6}\pi$

$\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=-1$ のとき，$\theta+\frac{2}{3}\pi=\frac{3}{2}\pi$ より　$\theta=\frac{5}{6}\pi$

したがって　$\boldsymbol{\theta=\frac{11}{6}\pi}$ **のとき最大値 2**，$\boldsymbol{\theta=\frac{5}{6}\pi}$ **のとき最小値 −2**

研究１　**三角方程式の解の個数**

θ の方程式 $\sin^2\theta+\sin\theta-a=0$ が，$0\leqq\theta<2\pi$ で 3 つの解をもつとき，定数 a の値を求めよ。

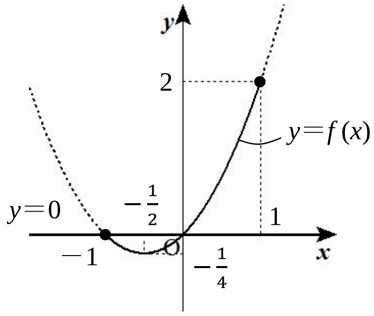
要　点

- まず，$\sin\theta=x$ とおく。$-1\leqq x\leqq 1$ であることに注意する。
- 与えられた方程式を $f(x)=a$ の形に整理する。方程式の解の個数は，関数 $y=f(x)$のグラフと直線 $y=a$ の交点に着目すればよい。
- $x=-1$，1 である x に対して，θ はそれぞれ 1 個の値をもつ。
  $-1<x<1$ である x に対して，θ はそれぞれ 2 個の値をもつことに注意する。

解答

$\sin\theta=x$ とおくと　$-1\leqq x\leqq 1$　　与えられた方程式は　$x^2+x=a$

$f(x)=x^2+x$ とおくと　$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$



関数 $y=f(x)$ のグラフは右のようになる。
与えられた θ の方程式が 3 つの解をもつのは，
関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ が

$x=1$ と $-1<x<1$ で交わる

または，$x=-1$ と $-1<x<1$ で交わる
ときである。右のグラフから，$y=f(x)$ と $y=0$ が
$x=-1$，0 で交わるから，求める a の値は　$\boldsymbol{a=0}$

$x=-1$，0 のとき　$\theta=\frac{3}{2}\pi$，0，π であり，
3 つの解をもつという題意を満たす。

研究２　三角関数の和と積の変換公式

次の値を求めよ。

(1)　$\sin 15°\ \cos 105°$　　(2)　$\sin 15°\ \sin 75°$

(3)　$\sin 15° - \sin 105°$　　(4)　$\cos 15° + \cos 75°$

要　点

三角関数の積を和・差になおす公式（積和公式）

1　$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

2　$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

3　$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

4　$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

三角関数の和・差を積になおす公式（和積公式）

5　$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

6　$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

7　$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

8　$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

解答

(1)　$\sin 15°\ \cos 105° = \frac{1}{2}\{\sin(15° + 105°) + \sin(15° - 105°)\} = \frac{1}{2}\{\sin 120° + \sin(-90°)\}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-2}{4}}$

(2)　$\sin 15°\ \sin 75° = -\frac{1}{2}\{\cos(15° + 75°) - \cos(15° - 75°)\} = -\frac{1}{2}\{\cos 90° - \cos(-60°)\}$

$= -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$

(3)　$\sin 15° - \sin 105° = 2\cos\frac{15° + 105°}{2}\sin\frac{15° - 105°}{2} = 2\cos 60°\ \sin(-45°) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(4)　$\cos 15° + \cos 75° = 2\cos\frac{15° + 75°}{2}\cos\frac{15° - 75°}{2} = 2\cos 45°\ \cos(-30°) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}$

研究３　三角関数を含む複雑な関数の最大値・最小値

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y = \sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(2)　関数 $y = \sin 2\theta - 2\sin\theta - 2\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

要　点

(1)　$\sin^2\theta$，$\sin\theta\cos\theta$，$\cos^2\theta$ のように $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 2 次の項だけで表される式は，

2倍角の公式　$\boldsymbol{\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}$，$\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2}}$，$\boldsymbol{\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}$　より，

$\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ の和で表されるので，三角関数の合成を用いて 1 種類の三角関数で表すことができる。

(2)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+\sin 2\theta$

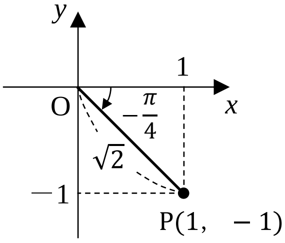
より，　$\sin 2\theta=t^2-1$　と表すことができる。

解答

(1)　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2}$，$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ であるから

$$y=\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=\frac{\sin 2\theta}{2}-\frac{1+\cos 2\theta}{2}=\frac{1}{2}(\sin 2\theta-\cos 2\theta)-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$$



$0\leqq\theta<2\pi$ のとき　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{15}{4}\pi$

よって　$2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{2}\pi$　　すなわち，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{3}{8}\pi}$**，**$\boldsymbol{\dfrac{11}{8}\pi}$ **のとき，**$\boldsymbol{y}$ **は最大値** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}}$ **をとり，**

$2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{7}{2}\pi$　　すなわち，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{7}{8}\pi}$**，**$\boldsymbol{\dfrac{15}{8}\pi}$ **のとき，**$\boldsymbol{y}$ **は最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}}$ **をとる。**

(2)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+\sin 2\theta$ であるから

$\sin 2\theta=t^2-1$　　よって　$y=\sin 2\theta-2\sin\theta-2\cos\theta=\sin 2\theta-2(\sin\theta+\cos\theta)$

$$=(t^2-1)-2t=t^2-2t-1=(t-1)^2-1-1=(t-1)^2-2$$

ここで，$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$　……①

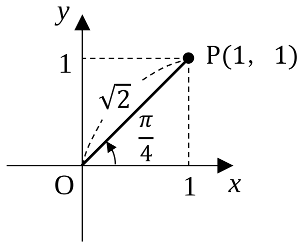
であり，$0\leqq\theta<2\pi$ より　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$　……②

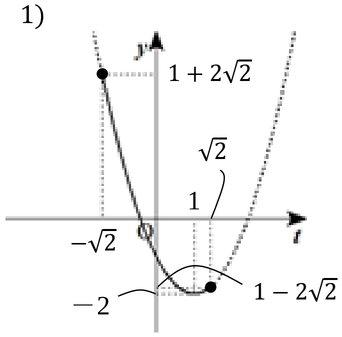
であるから　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

したがって，右の図より y は

$t=-\sqrt{2}$ のとき最大値 $1+2\sqrt{2}$

$t=1$ のとき最小値 -2　をとる。





$t=-\sqrt{2}$ のとき，①から　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$　　②の範囲で解くと　$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$　　すなわち　$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$

$t=1$ のとき，①から　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　②の範囲で解くと　$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$　すなわち　$\theta=0$，$\dfrac{\pi}{2}$

以上から，　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{5}{4}\pi}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{1+2\sqrt{2}}$**，**　$\boldsymbol{\theta=0}$**，**$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-2}$