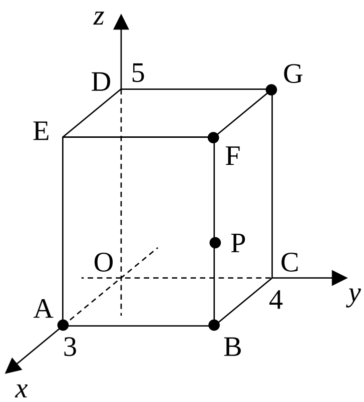
空間のベクトル

1　空間の座標

次の問いに答えよ。

(1)　①　右の図の直方体 OABC-DEFG について，
点 A，B，F，G の座標を求めよ。

②　点 P(3，4，2)と，yz 平面，x 軸，原点に関して対称な点の座標を求めよ。



(2)　次の 2 点間の距離を求めよ。

①　A(1，－2，0)，B(3，－1，－2)

②　O(0，0，0)，P(3，4，2)

要　点

空間の座標

【準備】

・**座標軸** である x 軸，y 軸，z 軸は，原点 O で互いに直交している。座標軸の定められた空間を **座標空間** という。

・x 軸と y 軸を含む平面を xy 平面，y 軸と z 軸を含む平面を yz 平面，z 軸と x 軸を含む平面を zx 平面といい，これらを **座標平面** という。

座標空間における点 P の座標は，次のように定まる。

点 P を通って各座標平面に平行な平面が x 軸，y 軸，z 軸と交わる点を A，B，C とする。

3 点 A，B，C の x 軸，y 軸，z 軸に関する座標を，それぞれ a，b，c とするとき，3 つの実数の組(a，b，c)を点 P の **座標** といい，**P(a，b，c)** と書く。

また，a，b，c をそれぞれ点 P の x 座標，y 座標，z 座標という。

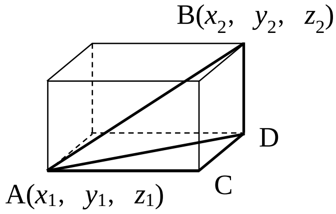
2 点間の距離

2 点 A(x_1，y_1，z_1)，B(x_2，y_2，z_2)間の距離は

$$\mathbf{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

〈注意〉直方体の対角線を考えることで確かめることができる。

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\sqrt{\mathrm{AD}^2+\mathrm{DB}^2}\\&=\sqrt{\mathrm{AC}^2+\mathrm{CD}^2+\mathrm{DB}^2}\\&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\end{aligned}$$



解答

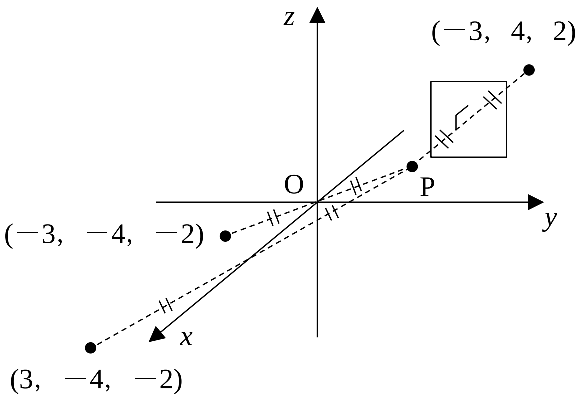
(1)　①　**点 A(3，0，0)，点 B(3，4，0)，**
点 F(3，4，5)，点 G(0，4，5)

②　点 P(3，4，2)と

***yz* 平面に対称な点　(−3，4，2)**

***x* 軸に対称な点　(3，−4，−2)**

原点に対称な点　(−3，−4，−2)



(2)　①　$\mathrm{AB}=\sqrt{(3-1)^2+\{-1-(-2)\}^2+(-2-0)^2}$

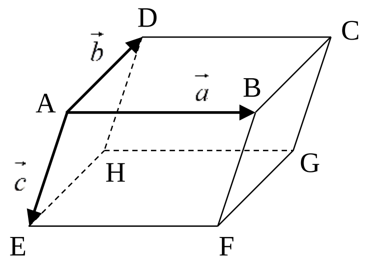
$=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\mathbf{3}$

②　$\mathrm{OP}=\sqrt{3^2+4^2+2^2}=\sqrt{\mathbf{29}}$

2　空間のベクトルの演算

平行六面体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{FC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

〈注意〉平行六面体とは，向かい合った 3 組の面がそれぞれ平行な六面体。平行六面体の各面は平行四辺形になっている。



要　点

空間においても，平面上の場合と同様にベクトルを考えることができる。

空間のベクトルにおいても，等しいベクトル，逆ベクトル，零ベクトル，単位ベクトル，加法，減法，実数倍を平面上の場合と同様に定める。

空間におけるベクトルの演算についても，次のことが成り立つ。

1　交換法則　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2　結合法則　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3　k，l を実数とするとき

$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$，$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{b}$，$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

4　$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$，$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$，$0\vec{a}=\vec{0}$，$k\vec{0}=\vec{0}$

解答

$\overrightarrow{\mathbf{FC}}=\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{\vec{b}-\vec{c}}$

$\overrightarrow{\mathbf{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}})=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}}$

3　空間のベクトルの成分表示

(1)　$\vec{a}=(-3,\ 1,\ -2)$，$\vec{b}=(1,\ 0,\ 2)$のとき，$-\vec{a}+2\vec{b}$を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

(2)　$\vec{a}=(-3,\ 1,\ -2)$，$\vec{b}=(1,\ 0,\ 2)$，$\vec{c}=(3,\ -3,\ 1)$のとき，$\vec{p}=(1,\ 2,\ 3)$を $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形で表せ。

要　点

ベクトルの成分表示

空間においては，平面上の場合に z 成分が加わったものとして考えることができる。

すなわち，空間のベクトル$\vec{a}$に対して，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$となる点 A の座標を$(a_1,\ a_2,\ a_3)$とすると，ベクトル$\vec{a}$の成分表示は，$\boldsymbol{\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)}$ となる。

ベクトルの相等

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$のとき　　$\boldsymbol{\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1}$ **かつ** $\boldsymbol{a_2=b_2}$ **かつ** $\boldsymbol{a_3=b_3}$

ベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$のとき　　$\boldsymbol{|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}}$

成分によるベクトルの演算

$\boxed{1}$　$\boldsymbol{(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)}$

$\boxed{2}$　$\boldsymbol{(a_1,\ a_2,\ a_3)-(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)}$

$\boxed{3}$　$\boldsymbol{k(a_1,\ a_2,\ a_3)=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)}$　　ただし，k は実数

ベクトルの分解

空間における 3 つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$が$\vec{0}$でなく，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$となる 4 点 O，A，B，C が同一平面上にないとき，任意のベクトル$\vec{p}$は　　$\boldsymbol{\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}}$　　ただし，s，t，u は実数

の形に，ただ 1 通りに表される。　　〈注意〉このようなベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$は **1 次独立である** という。

解答

(1)　$-\vec{a}+2\vec{b}=-(-3,\ 1,\ -2)+2(1,\ 0,\ 2)=(3,\ -1,\ 2)+(2,\ 0,\ 4)=\boldsymbol{(5,\ -1,\ 6)}$

$|-\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{5^2+(-1)^2+6^2}=\boldsymbol{\sqrt{62}}$

(2)　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$を成分で表すと

$(1,\ 2,\ 3)=s(-3,\ 1,\ -2)+t(1,\ 0,\ 2)+u(3,\ -3,\ 1)=(-3s+t+3u,\ s-3u,\ -2s+2t+u)$

よって　$\begin{cases} 1=-3s+t+3u \\ 2=s-3u \\ 3=-2s+2t+u \end{cases}$　　これを解いて　$s=-1$，$t=1$，$u=-1$　　したがって　$\boldsymbol{\vec{p}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}}$

4　空間のベクトルの平行と成分

2 点 A (3，1，-2)，B(1，0，0)とするとき，$\overrightarrow{AB}$に平行で，大きさが 3 のベクトル$\vec{p}$を求めよ。

要　点

次のことを利用する。

・2 点 A(a_1，a_2，a_3)，B(b_1，b_2，b_3)について　$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(\boldsymbol{b_1-a_1},\ \boldsymbol{b_2-a_2},\ \boldsymbol{b_3-a_3})$

・$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき　$\vec{\boldsymbol{a}}\,/\!/\,\vec{\boldsymbol{b}} \iff \vec{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{a}}$ **となる実数 *k* がある**

解答

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-3,\ 0-1,\ 0-(-2))=(-2,\ -1,\ 2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\vec{p}\neq\vec{0}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\vec{p}$ より，$\vec{p}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k があるから

$\vec{p}=k(-2,\ -1,\ 2)=(-2k,\ -k,\ 2k)$

$|\vec{p}|=3$ より　$\sqrt{(-2k)^2+(-k)^2+(2k)^2}=3$　　よって　$9k^2=9$　　これを解いて　$k=\pm1$

したがって　$\vec{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{(-2,\ -1,\ 2),\ (2,\ 1,\ -2)}$

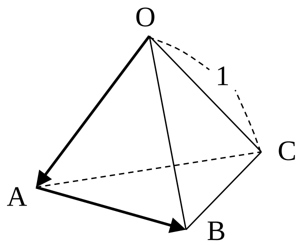
5　空間のベクトルの内積

次の問いに答えよ。

(1)　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，
　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求めよ。

(2)　$\vec{a}=(7,\ 1,\ 2)$，$\vec{b}=(4,\ 1,\ -1)$のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。
　また，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(3)　$\vec{a}=(7,\ 1,\ 2)$，$\vec{b}=(4+x,\ 1,\ -1+x)$が垂直であるとき，x の値を求めよ。



要　点

空間におけるベクトルの内積も，平面上の場合と同様に考えることができる。

内積の定義

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とするとき　　$\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}=|\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}|\cos\theta$　　ただし　$0°\leqq\theta\leqq180°$

〈注意〉$\vec{a}=\vec{0}$　または　$\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ とする。

内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$のとき　　$\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$

ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$のなす角を θ とすると，次のことが成り立つ。

$$\cos\theta=\frac{\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}|}=\frac{\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}}{\sqrt{\boldsymbol{a_1}^2+\boldsymbol{a_2}^2+\boldsymbol{a_3}^2}\sqrt{\boldsymbol{b_1}^2+\boldsymbol{b_2}^2+\boldsymbol{b_3}^2}}$$　　ただし　$0°\leqq\theta\leqq180°$

ベクトルの垂直条件

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$について，次のことが成り立つ。

$\vec{\boldsymbol{a}}\perp\vec{\boldsymbol{b}} \iff \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{0}$　　すなわち　$\vec{\boldsymbol{a}}\perp\vec{\boldsymbol{b}} \iff \boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0}$

解答

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のなす角は 120° であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos 120^\circ=1\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=7\times4+1\times1+2\times(-1)=\mathbf{27}$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{27}{\sqrt{7^2+1^2+2^2}\sqrt{4^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{27}{\sqrt{54}\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\boldsymbol{\theta=30^\circ}$

(3)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=7\times(4+x)+1\times1+2\times(-1+x)=27+9x$

$\vec{a}\perp\vec{b}$ となるには，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ となればよいので　$9x+27=0$　　よって　$\boldsymbol{x=-3}$

6　三角形の面積

3 点 O(0，0，0)，A(−3，1，−2)，B(1，0，2)を頂点とする三角形の面積 S を求めよ。

要　点

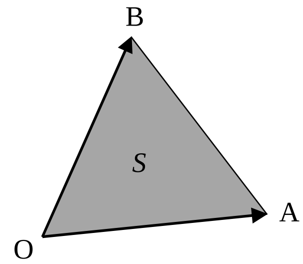
△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，

△OAB の面積 S は

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}$$

で表される。

（証明は，平面上のベクトルの場合と同様）



解答

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-3,\ 1,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 0,\ 2)$であるから

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=(-3)^2+1^2+(-2)^2=14$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=1^2+0^2+2^2=5$，

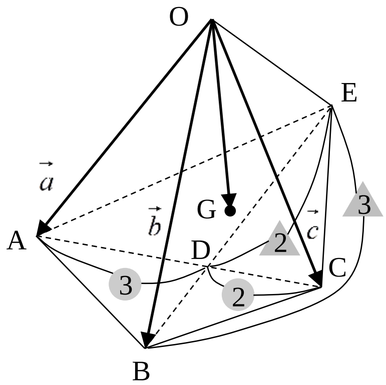
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-3\times1+1\times0+(-2)\times2=-7$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{14\times5-(-7)^2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{21}}{2}}$

7　空間の位置ベクトル

四面体 OABC があり，線分 AC を 3 : 2 に内分する点を D，線分 BD を 3 : 2 に外分する点を E，△ACE の重心を G とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



要　点

空間においても，平面上の場合と同様に位置ベクトルを定めることができ，次のことが成り立つ。

内分点・外分点の位置ベクトル

2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)を結ぶ線分 AB を

$\boxed{1}$　$m:n$ に**内分**する点を P($\vec{p}$)とすると　$\boldsymbol{\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}}$

$\boxed{2}$　$m:n$ に**外分**する点を Q($\vec{q}$)とすると　$\boldsymbol{\vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}}$

三角形の重心の位置ベクトル

3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)を頂点とする△ABC の重心 G の位置ベクトル$\vec{g}$は　$\boldsymbol{\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}}$

解答

点 D は線分 AC を 3 : 2 に内分するから　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3+2}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

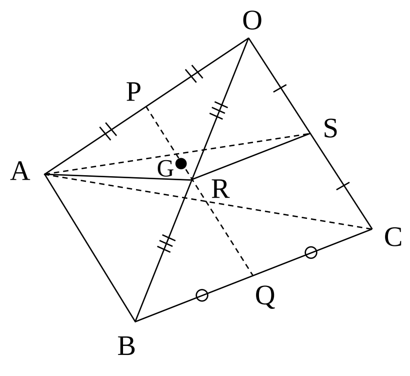
点 E は線分 BD を 3 : 2 に外分するから　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3-2}=-2\vec{b}+3\left(\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{c}\right)=\dfrac{6}{5}\vec{a}-2\vec{b}+\dfrac{9}{5}\vec{c}$

点 G は△ACE の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{3}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\left(\frac{6}{5}\vec{a}-2\vec{b}+\frac{9}{5}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\frac{11}{15}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{14}{15}\vec{c}}$$

$\boxed{8}$　**3 点が一直線上にある条件**

四面体 OABC において，辺 OA，BC，OB，OC の中点を P，Q，R，S とし，△ARS の重心を G とするとき，3 点 P，G，Q は一直線上にあることを証明せよ。



要　点

3 点 A，B，C が一直線上にある ⇔ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる定数 k がある

証明

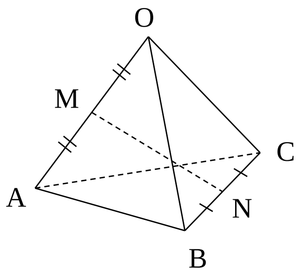
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\dfrac{1}{2}\vec{a}=\dfrac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}{3}-\frac{1}{2}\vec{a}=-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}=\frac{1}{6}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

よって　$\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{PG}$　　　したがって，3 点 P，G，Q は一直線上にある。

9　内積と空間図形

正四面体 OABC において，辺 OA，BC の中点を M，N とするとき，OA⊥MN であることを，ベクトルを用いて証明せよ。



要　点

内積の性質

・$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

・$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$　　　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

・$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　　ただし，k は実数

・$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

〈注意〉これらは，$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$として計算することで確かめられる。

OA⊥MN を証明するには，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MN}=0$ を示せばよい。

証明

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

ここで　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MN}=\vec{a}\cdot\dfrac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\dfrac{1}{2}(-|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})$

四面体 OABC は正四面体であるので　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$，$\angle AOB=\angle AOC=60°$

よって　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(-|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})=\dfrac{1}{2}(-|\vec{a}|^2+|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB+|\vec{a}||\vec{c}|\cos\angle AOC)$

$$=\frac{1}{2}\left(-|\vec{a}|^2+|\vec{a}|^2\times\frac{1}{2}+|\vec{a}|^2\times\frac{1}{2}\right)=0$$

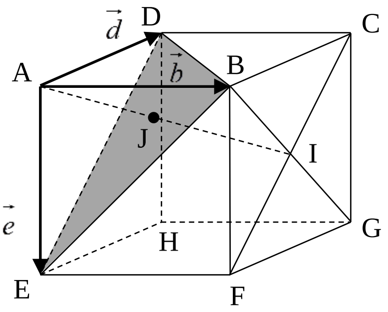
$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{MN}\neq\vec{0}$ であるから　OA⊥MN

１０　同一平面上にある点

次の問いに答えよ。

(1)　4 点 A$(-3,\ 1,\ -2)$，B$(1,\ -3,\ 2)$，C$(3,\ -3,\ 1)$，P$(x,\ 1,\ 2)$が同一平面上にあるとき，x の値を求めよ。

(2)　立方体 ABCD-EFGH において，
線分 BG と CF の交点を I とし，
直線 AI と平面 BDE の交点を J
とする。
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ を用いて表せ。



要　点

一直線上にない 3 点 A，B，C によって定められる平面 ABC について，次のことが成り立つ。

・点 P が平面 ABC 上にある ⇔ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　となる実数 s，t がある

・点 P が平面 ABC 上にある ⇔ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，　$r+s+t=1$ となる実数 r，s，t がある

解答

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-(-3),\ -3-1,\ 2-(-2))=(4,\ -4,\ 4)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3-(-3),\ -3-1,\ 1-(-2))=(6,\ -4,\ 3)$

であるから，3 点 A，B，C は一直線上にない。

よって，点 P が平面 ABC 上にあるためには　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

となる実数 s，t があることである。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-(-3),\ 1-1,\ 2-(-2))=(x+3,\ 0,\ 4)$から

$$(x+3,\ 0,\ 4)=s(4,\ -4,\ 4)+t(6,\ -4,\ 3)=(4s+6t,\ -4s-4t,\ 4s+3t)$$

これから，$\begin{cases} x+3=4s+6t \\ 0=-4s-4t \\ 4=4s+3t \end{cases}$　を解いて　$t=-4$，$s=4$，　$\boldsymbol{x=-11}$

$\boxed{\text{別解}}$　（3 点 A，B，C が一直線上にないことを示すまでは解答と同じ。）

点 P が平面 ABC 上にあるためには　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，　$r+s+t=1$

となる実数 r，s，t があることである。よって

$$(x,\ 1,\ 2)=r(-3,\ 1,\ -2)+s(1,\ -3,\ 2)+t(3,\ -3,\ 1)=(-3r+s+3t,\ r-3s-3t,\ -2r+2s+t)$$

これから，$\begin{cases} x=-3r+s+3t \\ 1=r-3s-3t \\ 2=-2r+2s+t \\ r+s+t=1 \end{cases}$　を解いて　$r=1$，$s=4$，$t=-4$，　$x=-11$

(2)　点 I は線分 BG の中点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AG}}}{2}=\dfrac{1}{2}\{\vec{b}+(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})\}=\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{d}+\dfrac{1}{2}\vec{e}$

点 J は直線 AI 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ となる実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AI}}=k\left(\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{d}+\dfrac{1}{2}\vec{e}\right)=k\vec{b}+\dfrac{1}{2}k\vec{d}+\dfrac{1}{2}k\vec{e}$　　……①

また，点 J は平面 BDE 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{BJ}}=s\overrightarrow{\mathrm{BD}}+t\overrightarrow{\mathrm{BE}}$　となる実数 s，t がある。

$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BJ}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BJ}}=\vec{b}+s\overrightarrow{\mathrm{BD}}+t\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\vec{b}+s(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+t(\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})$

$=\vec{b}+s(\vec{d}-\vec{b})+t(\vec{e}-\vec{b})=(1-s-t)\vec{b}+s\vec{d}+t\vec{e}$　　……②

①，②から　$k\vec{b}+\dfrac{1}{2}k\vec{d}+\dfrac{1}{2}k\vec{e}=(1-s-t)\vec{b}+s\vec{d}+t\vec{e}$

$\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ は 1 次独立であるから　　$k=1-s-t$，$\dfrac{1}{2}k=s$，$\dfrac{1}{2}k=t$　　よって　$k=\dfrac{1}{2}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{d}+\dfrac{1}{4}\vec{e}}$

別解　（①を求めるところまでは同じ。）

$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\dfrac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　であり，点 J は平面 BDE 上にあるから　$k+\dfrac{1}{2}k+\dfrac{1}{2}k=1$

よって　$k=\dfrac{1}{2}$　　したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{d}+\dfrac{1}{4}\vec{e}$

１１　座標軸に垂直な平面の方程式，球面の方程式

次の問いに答えよ。

(1)　点 A(−3，1，−2)を通る次のような平面の方程式を，それぞれ求めよ。

①　z 軸に垂直　　②　y 軸に垂直　　③　xy 平面に平行

(2)　点 A(−3，1，−2)を中心とし，半径が 3 の球面の方程式を求めよ。

要　点

座標軸に垂直な平面の方程式

点 P(a，b，c)を通り，x 軸に垂直な平面 α は，x 軸と(a，0，0)で交わる。α は x 座標が a で，y 座標，z 座標は任意である点全体の集合であるから，平面 α の方程式は　$\boldsymbol{x=a}$

同様に考えて，点 P を通り y 軸に垂直な平面の方程式は　$\boldsymbol{y=b}$

点 P を通り z 軸に垂直な平面の方程式は　$\boldsymbol{z=c}$

x 軸に垂直な平面は，yz 平面に平行であるともいえる。

球面の方程式

中心が点(a，b，c)，半径が r のとき　$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2}$

解答

(1)　①　$\boldsymbol{z=-2}$

②　$\boldsymbol{y=1}$

③　xy 平面に平行な平面は，z 軸に垂直な平面であるから　$\boldsymbol{z=-2}$

(2)　$\{x-(-3)\}^2+(y-1)^2+\{z-(-2)\}^2=3^2$

すなわち　$\boldsymbol{(x+3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9}$

$\boxed{\text{研究 1}}$　**空間における直線の方程式**

(1)　点 A$(-3,\ 1,\ -2)$を通り，次のベクトル$\vec{u}$を方向ベクトルとする直線の方程式を求めよ。

①　$\vec{u}=(3,\ -3,\ 1)$　　　　②　$\vec{u}=(1,\ 0,\ 2)$

(2)　2 点$(3,\ -3,\ 1)$，$(1,\ 0,\ 2)$を通る直線の方程式を求めよ。

(3)　2 直線 l_1：$\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-5}{2}$，$l_2$：$\dfrac{x-7}{7}=\dfrac{y+5}{-2}=z-8$ のなす角 θ を求めよ。

ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ とする。

要　点

空間における直線の方程式

点 A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$を通り，$\vec{0}$ でないベクトル$\vec{u}=(l,\ m,\ n)$に平行な直線上の任意の点を P$(\vec{p})$とし，

$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$とすると，t を実数として次のように媒介変数表示される。

$x=x_1+lt$，$y=y_1+mt$，$z=z_1+nt$

$lmn\neq0$ のとき，t を消去すると次の直線の方程式が得られる。

$$\boldsymbol{\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}}$$

また，$lm\neq0$，$n=0$ のときは　$\boldsymbol{\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}}$**，**$\boldsymbol{z=z_1}$

$l\neq0$，$m=n=0$ のときは　$\boldsymbol{y=y_1}$**，**$\boldsymbol{z=z_1}$

〈注意〉$\vec{u}$をこの直線の **方向ベクトル** という。

> x は任意の値をとる。
> これは，点$(0,\ y,\ z)$を通り，x 軸に平行な直線を表す。

(3)　l_1 と l_2 の方向ベクトルのなす角 θ を求めればよい。

解答

(1) ① $\boldsymbol{\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-1}{-3}=z+2}$

② $\boldsymbol{x+3=\dfrac{z+2}{2},\ y=1}$

(2) 求める直線の方向ベクトルを$\vec{u}$とすると

$\vec{u}=(1,\ 0,\ 2)-(3,\ -3,\ 1)=(-2,\ 3,\ 1)$

点(3，−3，1)を通るから $\boldsymbol{\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+3}{3}=z-1}$

(3) 2 直線 l_1，l_2 の方向ベクトルをそれぞれ$\vec{u_1}$，$\vec{u_2}$とすると $\vec{u_1}=(5,\ 5,\ 2)$，$\vec{u_2}=(7,\ -2,\ 1)$

$\vec{u_1}$，$\vec{u_2}$のなす角が 2 直線 l_1，l_2 のなす角 θ であるから

$$\cos\theta=\frac{\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{5\times7+5\times(-2)+2\times1}{\sqrt{5^2+5^2+2^2}\sqrt{7^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{27}{\sqrt{54}\sqrt{54}}=\frac{1}{2}$$

$0°\leqq\theta\leqq90°$ であるから $\boldsymbol{\theta=60°}$

研究２ **空間における平面の方程式，点と平面の距離**

次の問いに答えよ。

(1) 点 A(−3，1，−2)を通り，法線ベクトルが$\vec{n}=(3,\ -3,\ 1)$である平面の方程式を求めよ。

(2) 点(−3，1，−2)と平面 $4x-3y-5z+1=0$ の距離 h を求めよ。

要　点

空間における平面の方程式

点 A(x_1，y_1，z_1)を通り，$\vec{0}$ でないベクトル$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$に垂直な平面 α はただ 1 つに決まる。

この平面の方程式は

$$\boldsymbol{a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0}$$

〈注意〉$\vec{n}$をこの平面の **法線ベクトル** という。

平面上の任意の点をP($\vec{p}$)，点 A($\vec{a}$) とすると

$$\boldsymbol{\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0}$$

点と平面の距離

点 A(x_1，y_1，z_1)と平面 $ax+by+cz+d=0$ の距離 h は $\boldsymbol{h=\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$

解答

(1) $3(x+3)-3(y-1)+(z+2)=0$ すなわち $\boldsymbol{3x-3y+z+14=0}$

(2) $h=\dfrac{|4\times(-3)-3\times1-5\times(-2)+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+(-5)^2}}=\dfrac{|-4|}{\sqrt{50}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{5}}$